Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4110 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Øystein Skartsæterhagen og Morten Nome

Tlf: 95 92 55 96

Eksamensdato: 4. desember 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt. (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S)

Annen informasjon:
Eksamenen består av ti oppgaver Hver av disse teller like mye. Alle svar må begrunnes.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Finn alle løsninger av følgende likningssystem:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 28 \\ -2x + 5y - 4z = -20 \\ -x + y - z = -10 \end{cases}$$

Oppgave 2 Se på følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Er vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ lineært uavhengige? Er $\mathbf{b}$ en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$?

Oppgave 3 Finn generell løsning av systemet

$$\begin{cases} y_1' = 7y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

og skisser fasediagrammet.

Oppgave 4 Se på de tre punktene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^2$.

Finn andregradspolynomet $p(x) = ax^2 + bx + c$ som går gjennom alle disse punktene.

Bruk minste kvadraters metode til å finne førstegradspolynomet $q(x) = dx + e$ som passer best til de tre punktene.

Tegn grafene til p og q.

Oppgave 5 La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Finn alle 2×2-matriser X som er løsninger av likningen $AX = XA$.

Oppgave 6 Finn en ortogonal basis for underrommet av $\mathbb{R}^4$ utspent av disse vektorene:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 7 La R være følgende matrise:

$$R = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Regn ut R^{42}.

Oppgave 8 La A være følgende komplekse matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & i & 5-3i \\ 4 & 2i & 10+2i \\ 2i & -1 & 4+6i \end{bmatrix}$$

Først: Finn en basis for $\operatorname{Null} A$ og en basis for $\operatorname{Col} A$.

Deretter: Finn alle vektorer $\mathbf{v}$ i $\mathbb{C}^3$ som er slik at $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ og $\|\mathbf{v}\| = 1$.

Oppgave 9 Husk at vi skriver $\mathcal{M}_2$ for vektorrommet som består av alle reelle 2×2-matriser. Definer en funksjon $T\colon \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ ved

$$T(M) = M - M^\top.$$

Vis at T er en lineærtransformasjon, og finn $\ker T$ og $\operatorname{im} T$.

Oppgave 10 La A være en $m \times n$-matrise med lineært uavhengige kolonner, og la B og C være $n \times p$-matriser. Vis at hvis $AB = AC$, så er $B = C$.