Introduksjon

Velkommen til emnet TMA4110 Matematikk 3.

Vi som underviser emnet høsten 2018 har valgt å skrive notater som inneholder det vi gjennomgår i forelesningene, og resultatet er det du leser nå. Pensum for emnet er det som står i disse notatene – hverken mer eller mindre.

Vi begynner med å ta et overblikk over temaene vi skal innom i løpet av semesteret. Det gjør ikke noe om du ikke forstår alt i denne introduksjonen nå; vi skal gjennomgå det i detalj siden. Men forhåpentligvis får du en idé om hva emnet inneholder.

Emnet er delt inn i tre separate deler som egentlig hører til helt forskjellige områder innenfor matematikk:

1. Lineær algebra
2. Komplekse tall
3. Lineære differensiallikninger

Delen om lineær algebra utgjør hoveddelen av emnet og er den vi vil bruke mest tid på.

Grunnen til at disse tilsynelatende urelaterte temaene er gruppert sammen i ett emne er at det er noen viktige tilknytningspunkter mellom dem som gjør at det er fornuftig å lære om dem sammen.

Lineær algebra

Algebra er et område innenfor matematikk som i utgangspunktet handler om å løse likninger. For å få en idé om hva algebra er for noe, kan det være nyttig å vite hva det *ikke* er. Her er en liten guide til hvordan noen av de tingene du antagelig har gjort i ditt matematiske liv så langt passer inn i ulike områder innen matematikk:

Hvis du deriverer eller integrerer, så driver du med *analyse*. Hvis du tegner en figur, driver du antagelig med *geometri*. Hvis du teller antall måter du kan plukke opp forskjellige fargede kuler fra en pose på, så driver du med *kombinatorikk*; men hvis du deretter regner ut sannsynligheten for at du får to røde kuler, så har du flyttet deg over til *sannsynlighetsregning*. Hvis du prøver å forstå reglene for hvordan et matematisk bevis utføres, så driver du med *logikk*. Og hvis du løser en likning, da driver du med algebra.

Da du for eksempel (en gang for mange år siden) lærte at en andregradslikning

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kan løses ved hjelp av formelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

så var det en del av den klassiske, grunnleggende algebraen du lærte.

Ordet «algebra» kommer av det arabiske *al-jabr*, som var en del av tittelen på en bok skrevet omkring år 820 av den persiske matematikeren al-Khwarizmi. Denne boken inneholdt metoder for å løse likninger (blant annet andregradslikningen nevnt over), og la grunnlaget for algebra som fagområde.

Men så er det slik med matematikk at den stadig endrer seg. Matematisk forskning er en evig runddans av at matematikere finner opp nye teknikker og konsepter for å finne svar på spørsmål de synes er interessante, og så finner de ut at man kan stille nye interessante spørsmål om de nye tingene de har funnet opp, og så har man det gående.

I løpet av 1800-tallet og begynnelsen på 1900-tallet førte den matematiske utviklingen til at algebraen som fagfelt skiftet fokus. Man utviklet visse former for matematiske strukturer som ble brukt til å forstå ulike typer likninger, og over tid fant man ut at disse strukturene kunne generaliseres og være nyttige også til andre ting enn løsing av likninger. Dermed endte man opp med forskjellige typer *abstrakte algebraiske strukturer* (noen av disse kalles *grupper*, *ringer* og *moduler*), og algebra i dag handler primært om å forstå disse strukturene. Denne nye formen for algebra kalles *abstrakt algebra* (eller *moderne algebra*), for å skille den fra den mer tradisjonelle algebraen som handler om løsing av likninger.

Greit, det var veldig mye prat om algebra. Men hva er *lineær algebra* for noe?

Algebra handler opprinnelig om likninger, og lineær algebra er den delen av algebraen som handler om lineære likninger.

En lineær likning med én ukjent ser generelt slik ut:

$$ax = b$$

Dersom $a \neq 0$, kan vi løse denne likningen ved å dele på a:

$$x = b/a$$

Og det er egentlig omtrent alt som er å si om lineære likninger med én ukjent.

Men hvis vi ser på et system av flere lineære likninger, med flere ukjente, blir det straks mer interessant. Her er et eksempel på et system av lineære likninger:

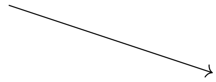
$$\begin{cases} 3x + 5y - 2z = 14 \\ x - 9y + 7z = 0 \\ -5x + 4y + 8z = -3 \end{cases}$$

Studiet av slike systemer er utgangspunktet for lineær algebra.

Det første vi skal lære er en metode (som kalles *gausseliminasjon*) for å løse lineære likningssystemer på en effektiv måte.

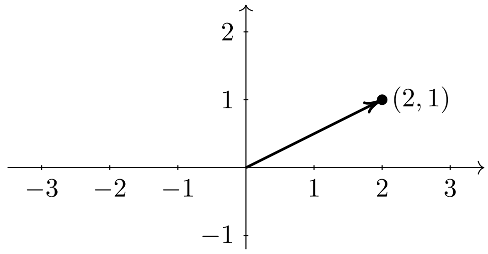
Deretter skal vi se at ved å innføre noen nye konsepter – nemlig *vektorer* og *matriser* – kan vi få en bedre forståelse av lineære likningssystemer.

Du har antagelig hørt om vektorer før, og antagelig har du lært å tenke på en vektor som en pil – noe som har en lengde og en retning.



En pil

Dette er imidlertid bare ett aspekt av vektorer. Vi vil velge å se på et *punkt* i planet, og *pilen* fra origo til dette punktet, og *koordinatene* til punktet, som tre forskjellige representasjoner av den samme vektoren.



Vektorenes treenighet:
punkt – pil – koordinater

Koordinatene som angir en vektor, for eksempel $(2, 1)$, vil vi vanligvis skrive på denne måten:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette kaller vi en *kolonnevektor* (vi kan også si *søylevektor*).

Det er klart at vi kan se på vektorer i to dimensjoner eller i tre dimensjoner – altså i et plan eller i et rom. Men hvis vi tenker på vektorer bare som kolonnevektorer, og glemmer det med punkter og piler, så er det ikke noe i veien for å snakke om vektorer i fire dimensjoner, eller fem, eller så mange dimensjoner vi vil. Og det skal vi gjøre.

Men hva har dette med lineære likningssystemer å gjøre? Vi skal definere aritmetiske operasjoner for vektorer (på ganske naturlige måter), slik at likningssystemet vi så for en stund siden kan skrives på denne måten:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot y + \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot z = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Istedenfor et system med flere likninger har vi altså én likning, der koeffisientene og høyresiden er vektorer. Istedenfor å tenke på problemet som det å finne tall som er løsninger av flere forskjellige likninger, tenker vi på det som å finne ut om visse vektorer kan kombineres slik at vi får en viss annen vektor.

Så innfører vi matriser, som er rektangulære tabeller med tall, og vi kan skrive om systemet vårt til:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -9 & 7 \\ -5 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Her har vi en matrise ganger en vektor på venstresiden, og en vektor på høyresiden. Når vi har lært om matriser, kan vi skrive et generelt lineært likningssystem på den konsise formen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

der A er en matrise, $\mathbf{b}$ er en konstant vektor, og $\mathbf{x}$ er en ukjent vektor.

Men det stopper ikke der! Vi kan snu likheten $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ litt på hodet. Istedenfor å si at $\mathbf{x}$ er en ukjent som vi vil finne, så kan vi si at når matrisen A ganges med en vektor $\mathbf{x}$, så får vi ut en ny vektor $\mathbf{b}$. Med andre ord: En matrise gir opphav til en funksjon som tar inn vektorer og gir ut vektorer. Hvis matrisen har m rader og n kolonner, så kan vi bruke den til å lage en funksjon T som tar inn n-dimensjonale vektorer og gir ut m-dimensjonale vektorer. En slik funksjon kalles en *lineærtransformasjon*, og vi skriver:

$$T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Her står $\mathbb{R}^n$ for mengden av alle n-dimensjonale kolonnevektorer, og en slik mengde kalles et *vektorrom*.

Nå viser det seg at vektorrom, lineærtransformasjoner og matriser er interessante ting å studere i seg selv, og at vi med utgangspunkt i disse tingene kan bygge opp en stor og flott matematisk teori med anvendelsesområder som går langt ut over det å løse likningssystemer. Den teorien er lineær algebra.

Komplekse tall

Hva er et tall? Da du som barn lærte å telle, lærte du tallene

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

Så lærte du å legge sammen tall, og å trekke tall fra hverandre. Da viste det seg at det går an å stille spørsmål som ikke har svar: Hva er $3 - 5$?

Men så lærte du at slike spørsmål likevel kan besvares når man bare har innført noen nye tall:

$$0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots$$

Videre utvidet du tallforståelsen din med *rasjonale tall* (brøker av heltall, for eksempel $7/5$), og så lærte du at det også finnes tall som ikke er rasjonale, for eksempel $\sqrt{2}$ og π. Når vi tar med alle slike tall, har vi mengden av *reelle tall*.

Fremdeles er det spørsmål som ikke kan besvares, for eksempel: Hva er $\sqrt{-1}$? Det finnes ikke noe reelt tall som vi kan opphøye i andre og få -1.

Men denne situasjonen er egentlig helt tilsvarende som da vi bare kjente til de positive tallene og lurte på hva $3-5$ er. Akkurat som vi da kunne utvide tallsystemet ved å legge til negative tall, kan vi nå legge til nye tall som gjør at uttrykket $\sqrt{-1}$ gir mening.

Vi lager et nytt tall, som vi kaller i, og som er definert til å være slik at

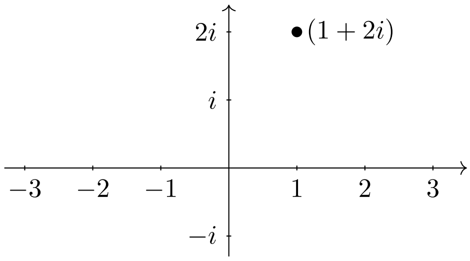
$$i^2 = -1$$

For å få et tallsystem som oppfører seg slik det skal, må vi kunne gange og legge sammen i med et hvilket som helst annet tall. Det gjør at vi må ha med flere nye tall, og til sammen får vi at alle tall som kan skrives som

$$a + bi \qquad \text{(der } a \text{ og } b \text{ er reelle tall)}$$

må være med i det nye tallsystemet. Disse tallene kalles *komplekse tall*.

Mengden av reelle tall visualiserer vi som en uendelig lang tallinje. Mengden av komplekse tall visualiserer vi som et todimensjonalt plan.



Det komplekse planet

Du må ikke la deg lure av navnet til å tro at komplekse tall er kompliserte å ha med å gjøre. På mange måter er det enklere å jobbe med komplekse tall enn med reelle tall.

Innenfor de komplekse tallene kan vi for eksempel alltid ta kvadratrøtter av hvilke som helst tall, uten å måtte tenke på om de er negative. Med andre ord: alle likninger på formen $x^2 = a$ har løsninger. Og ikke bare det, men alle andregradslikninger

$$ax^2 + bx + c = 0$$

har løsninger. Og ikke bare det, men alle polynomlikninger av hvilken som helst grad, altså alle likninger på formen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

har løsninger.

Det som imidlertid kan gjøre komplekse tall litt vanskelige er at de ikke helt passer inn i vår intuitive forståelse av hva et tall skal være. Med reelle tall kan vi lett se for oss hvordan et tall kan representere noe målbart i den virkelige verden: en avstand, et areal, en hastighet eller liknende. Med komplekse tall er det vanskeligere å se for seg hva tallene kan representere.

Når vi får bruk for komplekse tall er det ofte slik at vi starter med noe som bare handler om reelle tall, og får et sluttsvar med bare reelle tall, men må innom de komplekse tallene i mellomregningen. Vi kommer til å se eksempler på nettopp dette når vi i emnets siste del skal løse differensiallikninger.

Lineære differensiallikninger

En *differensiallikning* er en likning der den ukjente er en funksjon, og der den deriverte av denne ukjente funksjonen også er med i likningen.

Vi skal se på to forskjellige typer differensiallikninger. Den ene typen er lineære andreordens differensiallikninger, som vil si likninger på formen

$$y'' + py' + qy = g,$$

der y er en ukjent funksjon av en variabel t, og g er en kjent funksjon av t, og p og q er konstanter.

Når vi skal løse en slik likning får vi bruk for å lage en «hjelpelikning», nemlig andregradslikningen

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

der λ er den ukjente, og p og q er de samme konstantene som vi hadde i differensiallikningen. Det viser seg nemlig at løsningene av denne likningen gir oss viktig informasjon om hvordan løsningene av differensiallikningen ser ut. Men avhengig av hva p og q er, er det ikke sikkert at denne andregradslikningen har noen løsning i reelle tall. Her blir vi reddet av at vi har lært om komplekse tall! Vi kan alltid finne komplekse tall som er løsninger av hjelpelikningen vår, og disse kan vi igjen bruke til å finne løsningene av differensiallikningen vi startet med.

Den andre typen differensiallikninger vi skal se på er systemer av førsteordens lineære differensiallikninger, som vil si likningssystemer på formen

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

der koeffisientene a_{ij} er konstanter og hver x_i er en ukjent funksjon av t.

Når vi har lært om lineær algebra og matriser, ser vi at et slikt system også kan skrives på den mer kompakte formen

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

der $\mathbf{x}$ er en vektorfunksjon og A er en matrise. For å løse systemet vil vi bruke avansert lineær-algebraisk magi som litt forenklet sagt går ut på å vri det n-dimensjonale rommet om til et nytt n-dimensjonalt rom der systemet blir enkelt å løse, så løse det der, og til slutt vri rommet tilbake og ta løsningene med oss.