1 Lineære likningssystemer

Grunnlaget for lineær algebra er *lineære likningssystemer*. Vi starter vår reise inn i den lineære algebraen ved å se på noen forskjellige måter å løse likningssystemer på. Til slutt i dette kapitlet skal vi forsikre oss om at vi er helt enige om nøyaktig hva det vil si at et likningssystem er lineært, og innføre en praktisk måte å skrive lineære likningssystemer på.

Forskjellige fremgangsmåter

Her er et eksempel på et lineært likningssystem:

$$(*)\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ -x + 6y = 3 \end{cases}$$

I dette systemet har vi to likninger og to ukjente. En løsning av systemet består av to tall som vi kan sette inn for x og y slik at begge likningene er oppfylt samtidig.

Vi kjenner fra før til flere måter å løse et slikt system på. La oss løse systemet over med noen forskjellige metoder.

Eksempel 1.1. Den kanskje mest åpenbare metoden for å løse et likningssystem er å først løse én likning med hensyn på én av de ukjente, og så sette inn i den andre likningen (eller i *de* andre likningene, hvis vi har et system med mer enn to likninger).

For å løse systemet $(*)$ med denne metoden kan vi først løse den andre likningen med hensyn på x; da får vi:

$$x = 6y - 3$$

Så setter vi dette inn i den første likningen og forenkler:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (6y - 3) + 3y &= 9 \\ 12y - 6 + 3y &= 9 \\ 15y &= 15 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Til slutt setter vi denne y-verdien inn i uttrykket vi fant for x, og får:

$$x = 6y - 3 = 6 - 3 = 3$$

Vi har altså funnet ut at for at begge likningene skal være oppfylt, må vi ha at $x = 3$ og $y = 1$. Vi sjekker at dette virkelig er en løsning av $(*)$ ved å sette inn disse verdiene i begge likningene i systemet:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6 + 3 = 9 \\ -x + 6y &= -3 + 6 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

Vi har nå funnet ut at systemet $(*)$ har nøyaktig én løsning, nemlig $x = 3$ og $y = 1$. $\triangle$

Metoden i eksempelet over er enkel og grei, men kan bli temmelig tungvint å bruke hvis vi har mer enn to ukjente. Vi ser på en annen løsningsmetode for det samme systemet.

Eksempel 1.2. Vi ganger opp den andre likningen med 2, og deretter legger vi sammen de to likningene:

$$\begin{array}{rl} 2x + 3y = 9 & \text{(første likning)} \\ -2x + 12y = 6 & \text{(andre likning ganget med 2)} \\ \hline 15y = 15 & \text{(sum av likningene over)} \end{array}$$

På denne måten får vi x til å forsvinne, og vi står igjen med en likning med bare y.

Den nye likningen $15y = 15$ kan vi forenkle til $y = 1$. Nå kan vi gange opp denne med -3 og legge sammen med den første likningen fra systemet for å få en likning der y forsvinner:

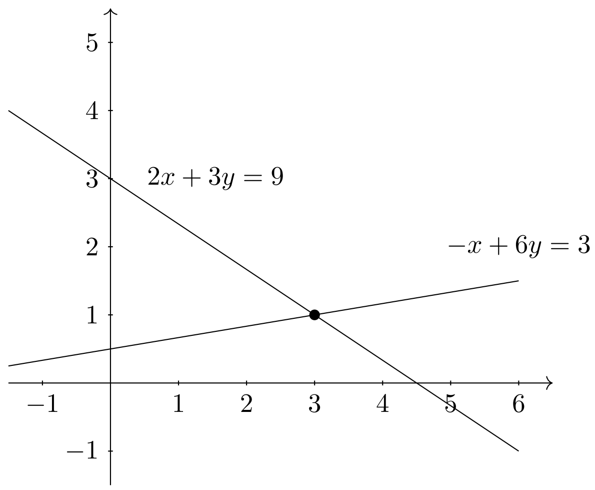
$$\begin{array}{rl} 2x + 3y = 9 & \text{(første likning fra } (*)) \\ -3y = -3 & \text{(ny likning ganget med } -3) \\ \hline 2x = 6 & \text{(sum av likningene over)} \end{array}$$

Nå har vi fått en likning med bare x, og vi forenkler den til $x = 3$. Vi har dermed igjen funnet løsningen $x = 3$ og $y = 6$. $\triangle$

Vi skal etter hvert komme frem til en generell fremgangsmåte for å løse lineære likningssystemer. Den fremgangsmåten baserer seg på å legge sammen likninger slik som vi gjorde nå.

Før vi går videre løser vi systemet vårt en tredje gang, på en helt annen måte:

Eksempel 1.3. Vi kan også løse systemet $(*)$ grafisk. Vi lager et koordinatsystem med en x-akse og en y-akse. Hver av de to likningene $2x + 3y = 9$ og $-x + 6y = 3$ beskriver en rett linje:



Løsningene av $2x + 3y = 9$ er alle punkter som ligger på den ene linjen, mens løsningene av $-x + 6y = 3$ er alle punkter som ligger på den andre linjen. Den felles løsningen av begge likningene er punktet der de to linjene møtes, nemlig $(3, 1)$. Løsningen er altså $x = 3$ og $y = 1$.

Denne metoden er fin for å visualisere problemet og se løsningen på en intuitiv måte, men ikke nødvendigvis den beste for å finne svaret eksakt. Dessuten blir det vanskelig å tegne hvis vi har mer enn to ukjente (men det kan likevel være nyttig å prøve å se for seg løsningene av for eksempel en likning med tre ukjente på en grafisk måte). $\triangle$

Hva er et lineært likningssystem?

Et lineært likningssystem er et system av lineære likninger. Men nøyaktig hva mener vi med at en likning er lineær?

Ordet «lineær» kommer fra det latinske «linea», som betyr «linje». Hvis vi har en likning med to ukjente, så kan vi tegne grafen til denne likningen. Vi sier at likningen er lineær hvis grafen dens er en rett linje. I eksempelet over så vi at grafene til likningene $2x + 3y = 9$ og $-x + 6y = 3$ er rette linjer. Men det er også lett å finne likninger som ikke har rettlinjede grafer, for eksempel $y = x^2$ eller $x^2 + y^2 = 4$.

Generelt er det slik at grafen til en likning er en rett linje hvis og bare hvis likningen kan skrives på formen

$$ax + by = c,$$

der a, b og c er konstanter.

Når vi vil se på likninger med mer enn to ukjente, gir det ikke lenger mening å snakke om at grafen blir en rett linje. Men det at likningen kan skrives på formen $ax + by = c$ kan vi lett utvide til å ta med flere ukjente, så det er dette vi bruker i den generelle definisjonen av lineære likninger.

Definisjon. En likning med n ukjente x_1, x_2, …, x_n kalles *lineær* dersom den kan skrives på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b,$$

der a_1, a_2, …, a_n og b er konstanter. Et *lineært likningssystem* er en samling av én eller flere lineære likninger med de samme ukjente. $\triangle$

Eksempel 1.4. Her er noen eksempler på lineære likninger:

$$5x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = 27$$
$$17x - 5y = \pi$$

Og her er noen eksempler på likninger som ikke er lineære:

$$2x^2 + y = 3$$
$$x_1 + 2x_1x_2 + x_3 = 1$$

$\triangle$

Ekvivalente systemer

Vi sier at to likningssystemer er *ekvivalente* dersom de har samme løsninger. Vi kan løse et likningssystem ved å erstatte det med stadig enklere ekvivalente systemer. Vi tar et eksempel for å se hvordan dette kan gjøres.

Eksempel 1.5. La oss løse det følgende lineære likningssystemet:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ x + 5y + 9z = 33 \\ 2x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

Vi vil begynne med å eliminere x-en fra de to siste likningene. Hvis vi trekker den første likningen fra den andre, får vi den nye likningen

$$3y + 11z = 38.$$

Vi bytter ut den andre likningen i systemet med denne nye likningen:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ 3y + 11z = 38 \\ 2x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

Dette systemet er ekvivalent med det vi startet med. Hvorfor er det det? Den nye likningen følger fra to av likningene vi hadde fra før. Dermed må enhver løsning av det opprinnelige systemet også være en løsning av det nye systemet.

Men omvendt er det også slik at den opprinnelige midterste likningen (som vi nå har tatt vekk) kan vi få ved å legge sammen de to første likningene i det nye systemet. Dermed må enhver løsning av det nye systemet også være en løsning av det gamle.

Til sammen betyr dette at de to systemene er ekvivalente.

Vi fortsetter å forenkle systemet. Vi eliminerer x fra den siste likningen ved å trekke fra første likning ganget med 2:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ 3y + 11z = 38 \\ y + 3z = 10 \end{cases}$$

Igjen har vi et nytt system som er ekvivalent med det forrige.

Nå vil vi eliminere y fra den siste likningen. Men det er lettere å eliminere y fra den midterste likningen (ved å trekke fra 3 ganger den siste). Likningenes rekkefølge spiller imidlertid ingen rolle, så vi kan bytte om på de to nederste likningene først:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ y + 3z = 10 \\ 3y + 11z = 38 \end{cases}$$

Så eliminerer vi y fra den siste likningen ved å trekke fra andre likning ganget med 3:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ y + 3z = 10 \\ 2z = 8 \end{cases}$$

Nå ser vi fra den siste likningen at vi må ha:

$$z = 4$$

Ved å sette inn det i den midterste likningen får vi:

$$y = 10 - 3 \cdot 4 = -2$$

Til slutt får vi, ved å sette inn y og z i den øverste likningen:

$$x = -5 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 7$$

Systemet har altså én løsning:

$$x = 7 \qquad y = -2 \qquad z = 4$$

$\triangle$

Alle likningssystemene vi skrev opp i dette eksempelet er ekvivalente med hverandre, men det siste er mye enklere å håndtere enn det vi startet med. Prosessen vi utførte for å forenkle systemet kalles *gausseliminasjon*, og blir nærmere beskrevet i kapittel 2.

Totalmatrisen til et system

Generelt kan et lineært likningssystem (med m likninger og n ukjente) se slik ut:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Når vi skal løse et slikt system, vil vi skrive opp en rekke nye systemer som er ekvivalent med dette, men som er stadig enklere. Da er det unødvendig tungvint å skrive alle de ukjente og alle $+$-ene og $=$-tegnene hver eneste gang. Den eneste informasjonen vi trenger å ha med oss gjennom utregningen er koeffisientene (a-ene) og tallene på høyresiden (b-ene).

Totalmatrisen til et likningssystem er en tabell som inneholder akkurat disse tallene:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Eksempel 1.6. Likningssystemet vi startet med i eksempel 1.5 har følgende totalmatrise:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 1 & 5 & 9 & 33 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$\triangle$

Den loddrette streken inni matrisen er egentlig ikke nødvendig å ha med, men den er praktisk for å hjelpe oss med å huske at det som står til høyre for streken hører til høyre side av likningene.