2 Gausseliminasjon

Nå skal vi formalisere ideene fra kapittel 1. Vi skal se hvordan vi kan løse et hvilket som helst lineært likningssystem ved å skrive om totalmatrisen til systemet etter bestemte regler.

Reglene for hvordan totalmatrisen kan skrives om kalles *radoperasjoner*, og målet er å få en matrise som er på *trappeform*. Denne prosessen kalles *gausseliminasjon*.

Radoperasjoner

Følgende tre måter å endre en matrise på kalles *radoperasjoner*:

1. Gange alle tallene i en rad med det samme tallet (ikke 0).
2. Legge til (et multiplum av) en rad i en annen.
3. Bytte rekkefølge på radene.

Vi sier at to matriser er *radekvivalente* hvis vi kan komme fra den ene til den andre ved å utføre en eller flere radoperasjoner. Vi bruker notasjonen $M \sim N$ for å si at to matriser M og N er radekvivalente.

Eksempel 2.1. Disse matrisene er radekvivalente, siden vi får den andre matrisen fra den første ved å gange øverste rad med 4:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 8 & 20 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \end{array}\right]$$

Merk at vi også kan gå motsatt vei: Ved å gange øverste rad i den andre matrisen med 1/4 får vi tilbake den første matrisen.

Disse to matrisene er også radekvivalente:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 9 & 5 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Her har vi brukt den andre typen radoperasjon: Vi la til -3 ganger øverste rad i nederste rad for å komme fra den første matrisen til den andre. Merk igjen at vi også kan gå motsatt vei: Ved å legge til 3 ganger øverste rad i nederste rad, kommer vi fra den andre matrisen til den første. △

Hele poenget med radoperasjoner er at det å utføre en radoperasjon på en totalmatrise tilsvarer å skrive om likningssystemet til et nytt system som er ekvivalent med det opprinnelige. Vi formulerer dette som et teorem:

Teorem 2.2. *Hvis to likningssystemer har radekvivalente totalmatriser, så er de to likningssystemene ekvivalente.*

Bevis. For å bevise dette, er det nok å vise at det å gjøre en radoperasjon på totalmatrisen til et likningssystem tilsvarer å gjøre en gyldig omskrivning av systemet selv.

Den første typen radoperasjon – å gange alle tallene i en rad med samme tall – tilsvarer å gange med det samme tallet på begge sider av en ligning. Litt mer detaljert: La oss si at

$$a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in} \mid b_i$$

er en av radene i totalmatrisen, og at vi ganger opp denne med tallet c slik at vi får:

$$(ca_{i1})\ (ca_{i2})\ \cdots\ (ca_{in}) \mid (cb_i)$$

Dette tilsvarer at vi bytter ut likningen

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

med den nye likningen

$$(ca_{i1})x_1 + (ca_{i2})x_2 + \cdots + (ca_{in})x_n = cb_i.$$

Men det er klart at hvis den opprinnelige likningen var sann, så må også den nye være det. Og siden det ikke tillates at tallet c som vi ganger med er 0, så har vi også det motsatte: Hvis den nye likningen er sann, så må også den opprinnelige være det. Altså gjør vi ingen endring i løsningene av likningssystemet ved å utføre denne typen radoperasjon.

For den andre typen radoperasjon – legge til et multiplum av en rad i en annen – kan vi på tilsvarende måte se at den nye raden vi lager tilsvarer en likning som må være sann hvis de gamle likningene var sanne. Sett at vi legger til c ganger rad i i rad j. Dette tilsvarer at vi ganger opp den i-te likningen med c, og legger til resultatet i den j-te likningen. Alle løsninger av de gamle likningene må da også være løsninger av denne nye likningen. Dessuten kan vi komme tilbake til det gamle systemet (ved å legge til $-c$ ganger rad i i rad j), og dermed må alle løsninger av det nye systemet også være løsninger av det gamle.

Den tredje og siste typen radoperasjon – bytte rekkefølge på radene – gjør åpenbart ingen endringer i løsningene av likningssystemet, siden dette bare tilsvarer å skrive likningene i en annen rekkefølge. ☐

Eksempel 2.3. Vi gjentar regningen i eksempel 1.5, denne gangen ved å utføre radoperasjoner på totalmatrisen til likningssystemet:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 1 & 5 & 9 & 33 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 11 & 38 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 11 & 38 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 3 & 11 & 38 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Her gjorde vi følgende radoperasjoner: Legge til -1 ganger første rad i andre rad, legge til -2 ganger første rad i tredje rad, bytte andre og tredje rad, og legge til -3 ganger andre rad i tredje rad.

Den siste matrisen her er på det som kalles trappeform, og da er det (som vi så i eksempel 1.5) lett å finne løsningen. Hvis vi vil gjøre det enda lettere, kan vi fortsette med radoperasjoner til vi oppnår det som kalles *redusert trappeform*:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Den siste totalmatrisen her svarer til følgende likningssystem:

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Her har vi altså kommet helt frem til løsningen. △

Trappeform

Vi vil nå gi en presis definisjon av begrepene «trappeform» og «redusert trappeform». Da trenger vi også et annet begrep, nemlig «pivotelement».

Definisjon. Det første tallet i en rad i en matrise som ikke er 0 kalles *pivotelementet* for den raden. (En rad med bare nuller har ikke noe pivotelement.) △

Eksempel 2.4. Se på følgende matrise:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 12 \\ 1 & 8 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivotelementene her er tallet 3 i den øverste raden, tallet 5 i den andre raden og tallet 1 i den tredje raden. Den siste raden består av bare nuller, og har derfor ikke noe pivotelement. △

Definisjon. En matrise er på *trappeform* dersom hvert pivotelement er til høyre for alle pivotelementer i tidligere rader, og eventuelle nullrader er helt nederst. △

Eksempel 2.5. Denne matrisen er på trappeform:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pivotelementene er 3, 1 og 2, og hvert av dem er til høyre for alle de tidligere pivotelementene.

Denne matrisen er også på trappeform:

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen er ikke på trappeform fordi nullradene ikke er samlet nederst:

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen ser «trappete» ut, men er likevel ikke på trappeform:

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Grunnen til at den ikke er på trappeform er at pivotelementet 9 i tredje rad ikke er til høyre for pivotelementet i andre rad, men rett under det isteden. △

Definisjon. En matrise er på *redusert trappeform* hvis den er på trappeform og dessuten oppfyller:

- Alle pivotelementene er 1.
- Alle tall som står over pivotelementer er 0. △

Den siste matrisen i eksempel 2.3 er på redusert trappeform, og der så vi også hva som gjør redusert trappeform nyttig: Løsningen av systemet kan leses av direkte.

Det å skrive om en matrise til trappeform ved hjelp av radoperasjoner kalles *gausseliminasjon*, oppkalt etter den tyske matematikeren Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Noen velger også å ha et eget navn på det å komme frem til *redusert* trappeform, og kaller den prosessen for *Gauss–Jordan-eliminasjon*, oppkalt etter Wilhelm Jordan (1842–1899). Vi tar det ikke så nøye med den forskjellen, og sier «gausseliminasjon» uansett.

(Disse begrepene er uansett historisk sett fullstendig misvisende. Metoden som vi kaller gausseliminasjon var kjent i Kina for flere tusen år siden, og Gauss – som riktignok var et universalgeni og fant opp mengder av flotte ting – har ikke egentlig så mye med den å gjøre.)

Eksistens og entydighet av løsninger

Når vi vil løse et likningssystem, er det noen åpenbare spørsmål vi kan stille:

- Har systemet noen løsning? (*Eksistens*)
- Hvis systemet har løsning: Har det også flere løsninger, eller bare én? (*Entydighet*)

I eksempel 2.3 hadde vi et system med entydig løsning. Vi tar noen flere eksempler for å vise andre ting som kan skje.

Eksempel 2.6. La oss løse følgende system:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -5x + 10y = -1 \end{cases}$$

Vi setter opp totalmatrisen og gausseliminerer:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 10 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Den siste matrisen svarer til følgende system:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0x + 0y = 4 \end{cases}$$

Likningen $0x+0y = 4$ kan også skrives som $0 = 4$, og den kan ikke stemme uansett hva vi setter x og y til å være. Dette systemet har altså ingen løsning. △

Generelt er det slik at hvis vi får en rad i totalmatrisen vår på formen

$$0\ 0\ \cdots\ 0 \mid b,$$

der b er et tall som ikke er 0, så har systemet ingen løsning. Denne raden svarer jo til likningen $0 = b$, som ikke kan være sann. Hvis vi har en matrise på trappeform der ingen av radene er på denne formen, så har systemet minst én løsning.

Men et lineært likningssystem kan også ha mer enn én løsning, som vi skal se i det neste eksempelet.

Eksempel 2.7. La oss løse følgende system:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 16 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 21 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 32 \end{cases}$$

Vi setter opp totalmatrisen og gausseliminerer:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & 16 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 21 \\ 2 & 6 & 4 & 6 & 32 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Den siste matrisen svarer til følgende system:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_4 = 6 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$$

(Her har vi ikke tatt med noen likning for nullraden i matrisen. Det er fordi nullraden står for likningen $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4 = 0$, eller med andre ord $0 = 0$. Denne likningen er åpenbart oppfylt uansett hva x_1, x_2, x_3 og x_4 er, så vi trenger ikke ta den med.)

Hvis vi flytter alt unntatt x_1 og x_3 til høyresiden, ser systemet slik ut:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - 7x_4 + 6 \\ x_3 = 2x_4 + 5 \end{cases}$$

Vi kan altså finne løsninger av systemet ved å sette x_2 og x_4 til å være hva vi vil, og deretter bruke disse to likhetene til å bestemme x_1 og x_3.

Hvis vi for eksempel velger $x_2 = 0$ og $x_4 = 1$, så får vi følgende løsning:

$$\begin{cases} x_1 = -3 \cdot 0 - 7 \cdot 1 + 6 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \cdot 1 + 5 = 7 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

For å beskrive alle løsningene av systemet på en ryddig måte, kan vi sette $x_2 = s$ og $x_4 = t$, der s og t står for to vilkårlige tall. Da er alle løsningene gitt ved:

$$\begin{cases} x_1 = -3s - 7t + 6 \\ x_2 = s \\ x_3 = 2t + 5 \\ x_4 = t \end{cases}$$

△

Variabler som vi kan sette til hva vi vil, slik som x_2 og x_4 i eksempelet over, kalles *frie variabler.*

Når vi løser et lineært likningssystem, og har funnet ut at det har minst én løsning, så er det to muligheter. Den ene muligheten er at vi ikke får noen frie variabler (slik som i eksempel 2.3). Da har systemet entydig løsning. Den andre muligheten er at det er en eller flere frie variabler (slik som i eksempel 2.7). Da har systemet uendelig mange løsninger, siden hver av de frie variablene kan settes til å være et hvilket som helst tall.

Dette betyr at det ikke er mulig at vi får for eksempel to løsninger, eller tre løsninger, og så videre. Om det først er mer enn én løsning, må det være uendelig mange.

La oss oppsummere det vi har funnet ut om eksistens og entydighet av løsninger. For ethvert lineært likningssystem må én av følgende være sant:

- Systemet har ingen løsning.
- Systemet har entydig løsning.
- Systemet har uendelig mange løsninger.

Valgfrihet

Når vi gausseliminerer har vi en viss grad av valgfrihet. Det som står fast er hva vi har lov til å gjøre, nemlig de tre typene radoperasjoner, og hva vi vil ende opp med, nemlig (redusert) trappeform. Nøyaktig hvordan vi bruker radoperasjoner for å komme frem kan vi velge selv.

Vi tar et enkelt eksempel for å illustrere dette.

Eksempel 2.8. Anta at vi vil gausseliminere denne totalmatrisen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 8 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 9 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

Her er vi nødt til å bytte øverste rad med en av de to andre for å få pivotelementet i første rad på riktig sted. Men vi velger selv hvilken av de to radene vi vil flytte til toppen. △

Vi har også noe frihet når det gjelder valg av frie variabler.

Eksempel 2.9. I eksempel 2.7 endte vi opp med at de to variablene x_2 og x_4 var frie. Men vi kunne også ha valgt å la x_1 og x_3 være frie, som vi skal se nå.

Vi hadde forenklet systemet til følgende:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - 7x_4 + 6 \\ x_3 = 2x_4 + 5 \end{cases}$$

Vi kan løse den andre likningen her for x_4 og få:

$$x_4 = \frac{x_3 - 5}{2}$$

Deretter kan vi sette inn dette i den første likningen og løse for x_2:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-x_1 - 7x_4 + 6}{3} \\ &= \frac{-x_1 - \frac{7}{2}(x_3 - 5) + 6}{3} \\ &= -\frac{1}{3}x_1 - \frac{7}{6}x_3 + \frac{47}{6} \end{aligned}$$

Hvis vi nå lar $x_1 = s$ og $x_3 = t$, så har vi følgende generelle løsning:

$$\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = -\frac{1}{3}s - \frac{7}{6}t + \frac{47}{6} \\ x_3 = t \\ x_4 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Dette ser annerledes ut enn det vi fikk i eksempel 2.7, men det beskriver nøyaktig de samme løsningene. (Du kan for eksempel sjekke at hvis vi her setter $s = -1$ og $t = 7$, så får vi den samme løsningen som da vi valgte $x_2 = 0$ og $x_4 = 1$ i eksempel 2.7). $\triangle$