7 Egenverdier og egenvektorer

Det er ofte hensiktsmessig å tenke på en matrise ikke bare som en tabell med tall, men som en transformasjon av vektorer. Hvis A er en $m \times n$-matrise, så gir A en transformasjon

$$\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$$

fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$. Vi kan anvende A på en vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$, og den vektoren transformeres til en vektor $A\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^m$.

Hvis A er en $n \times n$-matrise, altså en kvadratisk matrise, så sender den vektorer i $\mathbb{R}^n$ til andre vektorer som også er i $\mathbb{R}^n$. Generelt kan vektoren $A\mathbf{v}$ være veldig forskjellig fra $\mathbf{v}$, men noen ganger er den ikke det. Hvis virkningen av A på $\mathbf{v}$ er det samme som å bare gange opp $\mathbf{v}$ med et tall, så kalles $\mathbf{v}$ en *egenvektor* for A, og tallet kalles en *egenverdi*.

I dette kapitlet skal vi se hvordan vi kan finne alle egenverdiene og egenvektorene til en matrise, og vi skal se noen interessante egenskaper de har.

Definisjon av egenverdier og egenvektorer

Vi starter med et enkelt eksempel, slik at vi har et konkret tilfelle vi kan ha i tankene når vi kommer til definisjonen.

Eksempel 7.1. La A være følgende 2×2-matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Vi vil se på hva som skjer med punkter i planet når vi ganger dem med A, altså når vi sender en vektor $\mathbf{x}$ til vektoren $A\mathbf{x}$.

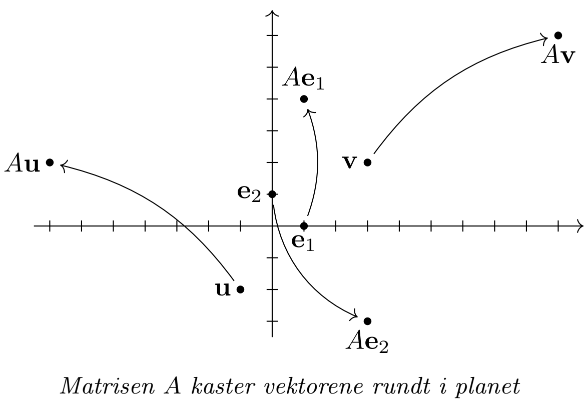
Vi velger følgende fire vektorer og ser hva A gjør med dem:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi får:

$$A\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \; A\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \; A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}, \; A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

La oss tegne opp de fire vektorene, samt vektorene A sender dem til, som punkter i planet.



Matrisen A kaster vektorene rundt i planet

Vi ser at matrisen sender de fire eksempelvektorene våre i forskjellige retninger. Men akkurat vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er interessant. Det som skjer med den er at den blir sendt til

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix},$$

men det er jo det samme som $3 \cdot \mathbf{v}$. Virkningen av matrisen A på akkurat denne vektoren er altså bare å skalere den opp med 3:

$$A\mathbf{v} = 3\mathbf{v}$$ △

Teorien om egenverdier og egenvektorer handler om å identifisere slike situasjoner som den vi så i eksempelet, der virkningen av en matrise på en vektor blir det samme som å bare gange opp vektoren med et tall.

Definisjon. La A være en $n \times n$-matrise, λ et tall og $\mathbf{v}$ en vektor i $\mathbb{R}^n$ som ikke er nullvektoren. Hvis

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

så sier vi at tallet λ er en *egenverdi* for matrisen A, og at vektoren $\mathbf{v}$ er en *egenvektor* for A som hører til egenverdien λ. △

Et par merknader – én matematisk og én språklig – er på sin plass etter denne definisjonen.

Merk. Hvorfor sier vi at $\mathbf{v}$ ikke skal være nullvektoren? Jo, for hvis vi setter inn nullvektoren for $\mathbf{v}$, så får vi likningen

$$A \cdot \mathbf{0} = \lambda \cdot \mathbf{0},$$

som er oppfylt for alle matriser A og alle tall λ. Hvis vi hadde tillatt nullvektoren som en egenvektor, så ville vi altså fått at alle tall er egenverdier for alle matriser. Da blir egenverdibegrepet ganske meningsløst. △

Merk. Det er vanlig å bruke den greske bokstaven λ som variabelnavn for egenverdier. Vi kunne i og for seg brukt en hvilken som helst annen bokstav, men siden det er λ folk vanligvis bruker, så gjør vi det. Navnet på bokstaven uttales «lambda», og den tilsvarer bokstaven *l* i det latinske alfabetet. Hvis vi for eksempel skriver navnet på filosofen Platon på hans eget språk, så er λ den andre bokstaven: Πλατων. △

Eksempel 7.2. Vi ser igjen på matrisen A fra eksempel 7.1. Vi så at vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

oppfylte likheten

$$A\mathbf{v} = 3\mathbf{v}.$$

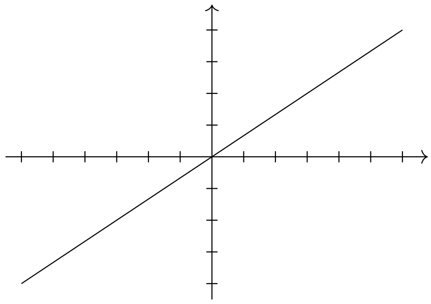
Det betyr at 3 er en egenverdi for matrisen A, og at $\mathbf{v}$ er en egenvektor som hører til egenverdien 3.

Finnes det flere egenvektorer? Hvis vi ser på en vektor som er parallell med $\mathbf{v}$, altså som er på formen $\mathbf{w} = c \cdot \mathbf{v}$ der c er et tall, så får vi:

$$A\mathbf{w} = A \cdot (c\mathbf{v}) = c \cdot (A\mathbf{v}) = c \cdot (3\mathbf{v}) = 3 \cdot \mathbf{w}$$

Enhver slik vektor er altså en egenvektor som hører til egenverdien 3, forutsatt at den ikke er nullvektoren.

Vi har altså funnet ut at A i hvert fall har én egenverdi, nemlig 3, og uendelig mange egenvektorer som hører til denne egenverdien, nemlig alle vektorene på denne linjen (unntatt nullvektoren):



Det vi foreløpig ikke vet, er om det kan finnes enda flere egenvektorer, og om A har flere egenverdier enn 3. Vi skal vende tilbake til dette eksempelet om en stund og finne ut av dette, etter at vi har kommet frem til en generell metode for å finne alle egenverdiene og egenvektorene til en matrise. △

I eksempelet så vi at vi ut fra én egenvektor kunne finne uendelig mange egenvektorer som hørte til den samme egenverdien. Vi formulerer dette generelt som et teorem. (Beviset får du enkelt ved å generalisere det vi gjorde i eksempelet.)

Teorem 7.3. *Anta at λ er en egenverdi for en $n \times n$-matrise A, og at $\mathbf{v}$ er en tilhørende egenvektor. Da er alle multipler $c\mathbf{v}$ av vektoren $\mathbf{v}$, der c er et tall som ikke er 0, også egenvektorer som hører til egenverdien λ. Med andre ord er alle vektorer i mengden $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}\}$, unntatt nullvektoren, egenvektorer som hører til egenverdien λ.*

En annen ting som vi enkelt kan se ut fra definisjonen av egenverdier og egenvektorer, er hva som skal til for at en matrise skal ha 0 som egenverdi. Hvis vi setter inn 0 for λ i likheten

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

så får vi $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Det vil si at en matrise A har 0 som egenverdi hvis og bare hvis likningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

har ikketrivielle løsninger, og dette er igjen sant hvis og bare hvis A ikke er inverterbar. Vi formulerer dette også som et teorem.

Teorem 7.4. *En $n \times n$-matrise A har 0 som egenverdi hvis og bare hvis den ikke er inverterbar.*

Noen geometriske eksempler

Før vi utleder den generelle fremgangsmåten for å regne ut egenverdier og egenvektorer, tar vi noen enkle eksempler der vi kan se geometrisk hva egenverdiene og egenvektorene må være.

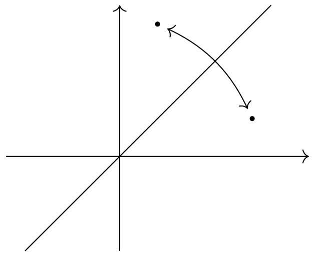
Eksempel 7.5. La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Da er

$$A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

for enhver vektor (v_1, v_2) i $\mathbb{R}^2$. Virkningen av A er altså en refleksjon om diagonallinjen som går gjennom origo og punktet $(1, 1)$.



Matrisen A reflekterer vektorene om diagonalen

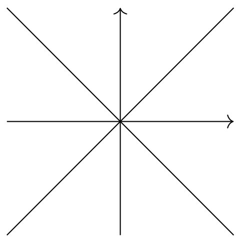
Vi ser lett at alle punkter på denne diagonalen sendes til seg selv, så disse oppfyller likheten

$$A\mathbf{v} = \mathbf{v},$$

og er altså egenvektorer tilhørende egenverdien 1. Når vi tenker oss litt mer om, finner vi dessuten ut at alle punkter på den omvendte diagonalen reflekteres gjennom origo slik at de oppfyller likheten

$$A\mathbf{v} = -\mathbf{v}$$

og er egenvektorer tilhørende egenverdien -1. Da har vi funnet at alle vektorene på disse to diagonallinjene (unntatt nullvektoren, selvsagt) er egenvektorer:



Egenvektorene er på diagonalene

Men for alle andre vektorer $\mathbf{v}$ i planet gjør refleksjonen av $A\mathbf{v}$ peker i en annen retning enn $\mathbf{v}$, så det finnes ikke flere egenvektorer. △

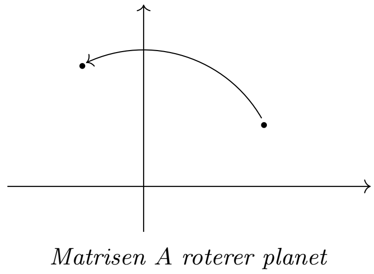
Eksempel 7.6. La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Da er

$$A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

for enhver vektor (v_1, v_2) i $\mathbb{R}^2$. Virkningen av A er altså å rotere planet med $90°$.



Matrisen A roterer planet

Dermed kan ikke A ha noen egenvektorer, siden enhver vektor (utenom nullvektoren) sendes til en som peker i en annen retning. △

Hvordan finne egenverdier/-vektorer

Gitt en $n \times n$-matrise A, hvordan kan vi finne alle egenverdiene og egenvektorene dens?

Ut fra definisjonen er vi på jakt etter tall λ og vektorer $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ som oppfyller likheten

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Vi har altså en likning med både λ og $\mathbf{v}$ som ukjente, og den ser ved første øyekast ganske uhåndterlig ut. Men vi kan trikse litt med den. Vi kan først flytte alt over til venstre side:

$$A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Nå fremstår det som veldig fristende å sette $\mathbf{v}$-en utenfor parentes, altså å skrive $(A - \lambda)\mathbf{v}$. Men det går ikke an, for uttrykket $A - \lambda$, altså en matrise minus et tall, gir ikke mening.

Nå kan vi bruke et lurt triks: Vi ganger inn identitetsmatrisen I_n. Vi vet at $I_n\mathbf{v}$ bare blir $\mathbf{v}$ uansett hva vektoren $\mathbf{v}$ er, så vi kan skrive om likningen til:

$$A\mathbf{v} - \lambda I_n\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Det vi har oppnådd nå er at vi har en $n \times n$-matrise ganget med $\mathbf{v}$ i hvert ledd, og da kan vi sette $\mathbf{v}$ utenfor parentes:

$$(A - \lambda I_n) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Nå ser vi at λ er en egenverdi for A hvis og bare hvis likningen

$$(A - \lambda I_n) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

har en ikketriviell løsning. Men dette er bare et vanlig lineært likningssystem med

$$A - \lambda I_n$$

som koeffisientmatrise, og vi vet fra før at et slikt system har ikketrivielle løsninger hvis og bare hvis

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Her har vi endt opp med en likning med bare λ som ukjent. Vi kan altså løse denne for å finne egenverdiene, uten at vi samtidig må tenke på hva de tilhørende egenvektorene skal være.

Vi oppsummerer det vi har funnet ut i et teorem.

Teorem 7.7. *La A være en $n \times n$-matrise.*

(a) Egenverdiene til A er alle løsninger λ av likningen

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

(b) Hvis λ er en egenverdi for A, så er de tilhørende egenvektorene gitt ved alle ikketrivielle løsninger av likningen

$$(A - \lambda I_n) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Uttrykket

$$\det(A - \lambda I_n),$$

som står på venstresiden av likningen vi løser for å finne egenverdiene, blir et n-tegradspolynom i λ. Vi kaller det for det *karakteristiske polynomet* til A.

Eksempel 7.8. Nå kan vi bruke teorem 7.7 til å finne alle egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

fra eksempel 7.1.

Vi finner egenverdiene ved å løse likningen

$$\det(A - \lambda I_2) = 0,$$

der venstresiden er det karakteristiske polynomet til A. La oss først se hvordan matrisen $A - \lambda I_2$ ser ut:

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

Det karakteristiske polynomet blir:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-3-\lambda) - 3 \cdot 4 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda - 15 \end{aligned}$$

Det betyr at vi kan løse andregradslikningen

$$\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$$

for å finne egenverdiene. Vi løser den på vanlig måte og får:

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-15)}}{2} = -1 \pm 4$$

Vi får altså to egenverdier: 3 og -5.

Vi finner alle egenvektorer som hører til egenverdien 3 ved å løse likningen $(A - 3I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi kan løse denne likningen ved å gausseliminere matrisen $(A - 3I_2)$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får én fri variabel, og løsningene blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot t$$

for alle tall t. Egenvektorene som hører til egenverdien 3 er altså alle vektorer i

$$\text{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

unntatt nullvektoren.

Vi finner alle egenvektorer som hører til egenverdien -5 ved å løse likningen $(A + 5I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi kan løse denne likningen ved å gausseliminere matrisen $(A + 5I_2)$:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får én fri variabel, og løsningene blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot t$$

for alle tall t. Egenvektorene som hører til egenverdien -5 er altså alle vektorer i

$$\text{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\},$$

unntatt nullvektoren. △

Egenrom

Vi har sett at egenverdiene til en matrise er noen enkeltverdier, mens egenvektorene er uendelig mange (dersom matrisen har egenverdier og egenvektorer). I eksempel 7.8 beskrev vi egenvektorene tilhørende en gitt egenvektor ved å si «alle vektorer i (...) unntatt nullvektoren». Vi innfører nå et nytt begrep som gjør det litt enklere å beskrive alle egenvektorene til en egenverdi.

Definisjon. La A være en $n \times n$-matrise, og anta at λ er en egenverdi for A. Da er *egenrommet* til λ mengden av alle egenvektorer som hører til λ, samt nullvektoren; altså mengden

$$\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \}. \qquad \triangle$$

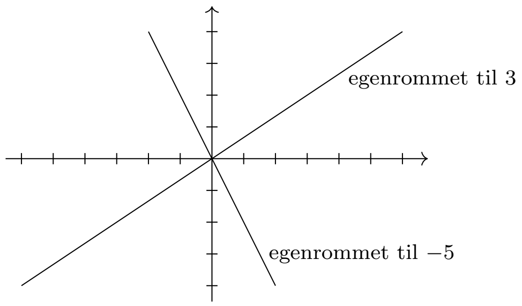
Eksempel 7.9. I eksempel 7.8 kunne vi sagt at egenrommet til egenvektoren 3 er

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

og at egenrommet til egenvektoren -5 er

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Hvert av disse to egenrommene er en linje i planet:



$\triangle$

La oss nå ta et litt større eksempel.

Eksempel 7.10. Vi finner egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 12 & 4 & -6 \\ -20 & 0 & 14 \end{bmatrix},$$

og de tilhørende egenrommene.

Det karakteristiske polynomet til A er:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -8-\lambda & 0 & 6 \\ 12 & 4-\lambda & -6 \\ -20 & 0 & 14-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -8-\lambda & 6 \\ -20 & 14-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)\big((-8-\lambda)(14-\lambda) + 6 \cdot 20\big) \\ &= (4-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) \end{aligned}$$

Vi finner altså egenverdiene til A ved å løse tredjegradslikningen

$$(4-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0.$$

Denne likningen er ekvivalent med at

$$4 - \lambda = 0 \qquad \text{eller} \qquad \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Andregradslikningen $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ har løsninger

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}}{2} = 3 \pm 1,$$

så vi får to egenverdier: 2 og 4.

Vi finner egenrommene ved å løse likningene

$$(A - 2I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{og} \qquad (A - 4I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Vi tar ikke med all utregningen her, men du bør gjøre den selv. Resultatet blir at egenrommet til egenverdien 2 er

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\},$$

og egenrommet til egenverdien 4 er

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Egenrommet til 2 er altså en linje i $\mathbb{R}^3$, mens egenrommet til 4 er et plan. $\triangle$

Diagonalmatriser

La oss se på noen eksempler på matriser der det er veldig lett å se hva egenverdiene er.

Eksempel 7.11. Har identitetsmatrisen I_n noen egenverdier? Vi vet at

$$I_n \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v}$$

for alle vektorer $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$. Dermed ser vi at I_n har tallet 1 som egenverdi, med hele $\mathbb{R}^n$ som det tilhørende egenrommet. $\triangle$

Eksempel 7.12. La A være følgende 2×2-matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Da har vi at

$$A\mathbf{v} = 9\mathbf{v}$$

for alle $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$. Det betyr at 9 er en egenverdi for A, og det tilhørende egenrommet er hele $\mathbb{R}^2$. $\triangle$

Eksempel 7.13. La A være følgende 3×3-matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da har vi at

$$A \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7v_1 \\ -3v_2 \\ 1v_3 \end{bmatrix}$$

for en vektor (v_1, v_2, v_3) i $\mathbb{R}^3$. Da ser vi lett at de tre enhetsvektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer, med 7, -3 og 1 som tilhørende egenverdier. Det er også lett å se at hvis vi har en vektor (v_1, v_2, v_3) der minst to av komponentene v_1, v_2 og v_3 ikke er 0, så kan den ikke være en egenvektor, siden komponentene ganges opp med ulike tall når vi ganger vektoren med A.

Vi ser altså at matrisen har egenverdiene 7, -3 og 1, med

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\} \quad \text{og} \quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

som tilhørende egenrom. △

I alle disse tre eksemplene hadde vi matriser der de eneste tallene som ikke er 0 er på diagonalen. Vi gir et navn til slike matriser.

Definisjon. En *diagonalmatrise* er en kvadratisk matrise der alle tall utenfor diagonalen er 0, altså en matrise på følgende form:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

△

På samme måte som i eksemplene over kan vi lett finne egenverdiene til enhver diagonalmatrise.

Teorem 7.14. *Egenverdiene til en diagonalmatrise er tallene på diagonalen.*

Lineær uavhengighet av egenvektorer

Vi skal nå ta en ganske omfattende diskusjon om hvorvidt egenvektorer er lineært uavhengige av hverandre, og hva vi kan si om vektorer som ligger i mengden utspent av noen gitte egenvektorer.

Hele diskusjonen kommer til å bli konkludert med et fint og flott teorem (teorem 7.15), men la oss ikke se på konklusjonen helt med en gang. For å prøve å forstå hvordan man kunne kommet frem til det teoremet på egen hånd, skal vi bygge oss opp mot det i små steg. Vi begynner med å se på én egenvektor, og deretter to egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier. Vi ser hva vi kan si om disse, og etter hvert kommer vi til å nærme oss et generelt resultat.

Gjennom alt det vi skal gjøre nå lar vi A være en $n \times n$-matrise.

Vi vet fra før (teorem 7.3) at hvis vi har en egenvektor $\mathbf{v}$ som hører til en egenverdi λ, så er enhver vektor i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}\}$, utenom nullvektoren, også en egenvektor som hører til λ. Vi har altså:

Hvis $\mathbf{w}$ er en skalar ganger en egenvektor $\mathbf{v}$, og ikke er lik nullvektoren, så er $\mathbf{w}$ en egenvektor tilhørende samme egenverdi som $\mathbf{v}$.

Dette enkle og greie resultatet skal vi utnytte når vi nå går videre til å se på flere egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier.

La oss se på hva vi kan si hvis vi har to egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 \text{ og } \mathbf{v}_2$$

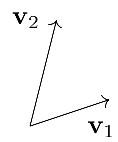
som hører til to forskjellige egenverdier

$$\lambda_1 \text{ og } \lambda_2.$$

Vi vet at alle vektorer i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1\}$ er egenvektorer som hører til egenverdien λ_1. Dermed er det klart at $\mathbf{v}_2$ ikke kan være i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1\}$, siden $\mathbf{v}_2$ hører til egenverdien λ_2. På samme måte ser vi at $\mathbf{v}_1$ ikke kan være i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_2\}$. Dermed ser vi (ved å bruke teorem 5.5, eller ved å tenke selv) at vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige. Vi har altså vist:

To egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier må være lineært uavhengige.

Dette betyr at vi kan se for oss de to vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ som to piler som peker i forskjellige retninger:



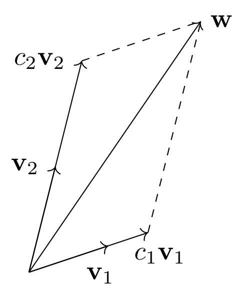
De to egenvektorene våre

La oss nå se hva vi kan si om en vektor $\mathbf{w}$ i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, altså i planet utspent av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. En slik vektor $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, så det finnes tall c_1 og c_2 slik at

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2.$$

For det første: Hvis $c_2 = 0$, så er $\mathbf{w}$ bare et tall ganger $\mathbf{v}_1$, og da vet vi at den er en egenvektor som hører til egenverdien λ_1. På samme måte får vi at hvis $c_1 = 0$, så er $\mathbf{w}$ en egenvektor som hører til egenverdien λ_2. Men hva kan vi si dersom både c_1 og c_2 er forskjellige fra 0, altså dersom $\mathbf{w}$ ikke ligger i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1\}$ eller i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_2\}$?

Vi tegner inn $\mathbf{w}$ på tegningen vår, og får med hvordan den er en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$:

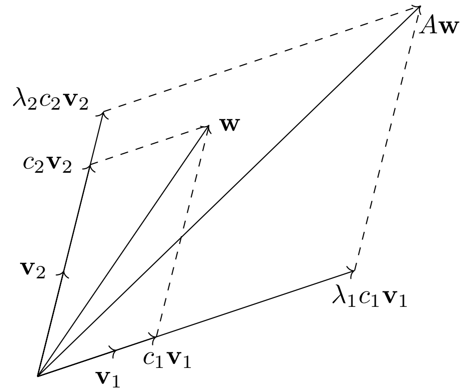


Vektoren $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$

Nå vil vi finne ut om $\mathbf{w}$ er en egenvektor eller ikke, altså om det finnes et tall λ slik at $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$. Vi ser på uttrykket $A\mathbf{w}$. Siden vi vet at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektorer tilhørende egenverdiene λ_1 og λ_2, får vi:

$$A\mathbf{w} = Ac_1\mathbf{v}_1 + Ac_2\mathbf{v}_2 = \lambda_1 c_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2 c_2\mathbf{v}_2$$

Vi tegner inn $A\mathbf{w}$ også på tegningen vår:



Vektoren $A\mathbf{w}$ må peke i en annen retning enn $\mathbf{w}$ fordi $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Denne siste figuren viser at $\mathbf{w}$ ikke kan være en egenvektor. Den eneste muligheten for å få $A\mathbf{w}$ til å peke i samme retning som $\mathbf{w}$ er å anta at $\lambda_1 = \lambda_2$, og vi har jo antatt akkurat det motsatte, nemlig at $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Denne figuren er det man bør se for seg for å forstå hva som skjer, men vi kan vise det samme på en mer presis og rent algebraisk måte som ikke avhenger av figuren.

Hvis vi ganger $\mathbf{w}$ med et tall λ, så får vi:

$$\lambda\mathbf{w} = \lambda c_1\mathbf{v}_1 + \lambda c_2\mathbf{v}_2$$

Og vi så at hvis vi ganger A med $\mathbf{w}$, så får vi:

$$A\mathbf{w} = \lambda_1 c_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2 c_2\mathbf{v}_2$$

Hvis $\mathbf{w}$ er en egenverdi, så finnes det en λ slik at $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$, og dermed:

$$\lambda_1 c_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2 c_2\mathbf{v}_2 = \lambda c_1\mathbf{v}_1 + \lambda c_2\mathbf{v}_2$$

Siden $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige, betyr dette at

$$\lambda_1 c_1 = \lambda c_1 \qquad \text{og} \qquad \lambda_2 c_2 = \lambda c_2.$$

Men vi har antatt at både c_1 og c_2 er forskjellige fra 0 og at $\lambda_1 \neq \lambda_2$, og da er dette umulig. Det vil si at $\mathbf{w}$ ikke er en egenvektor.

Nå har vi vist:

Hvis $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av to egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier, så er det to muligheter: Enten er $\mathbf{w}$ lik en skalar ganger én av de to egenvektorene, eller så er $\mathbf{w}$ ikke en egenvektor.

Nå går vi videre til å se på tre egenvektorer

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2 \text{ og } \mathbf{v}_3$$

som hører til forskjellige egenverdier

$$\lambda_1,\ \lambda_2 \text{ og } \lambda_3.$$

Da kan vi bruke det vi nettopp viste til å konkludere med at ingen av disse egenvektorene kan være en lineærkombinasjon av de andre to. For hvis $\mathbf{v}_3$ skulle vært i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, så ville vi fått at den enten er nullvektoren, eller en skalar ganger $\mathbf{v}_1$ eller $\mathbf{v}_2$ (men da ville den hatt λ_1 eller λ_2 som tilhørende egenverdi istedenfor λ_3), eller så ville den ikke vært en egenvektor i det hele tatt. Alle disse alternativene er utelukket, siden vi har antatt at $\mathbf{v}_3$ er en egenvektor tilhørende egenverdien λ_3.

På samme måte får vi at $\mathbf{v}_2$ ikke kan være i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ og at $\mathbf{v}_1$ ikke kan være i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Siden vi har vist at ingen av de tre vektorene er en lineærkombinasjon av de andre to, får vi (fra teorem 5.11) at de er lineært uavhengige. Vi har altså vist:

Tre egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier må være lineært uavhengige.

Men vi trenger ikke å gi oss der. Ved et helt tilsvarende argument som det vi hadde i tilfellet med to vektorer kan vi vise:

Hvis $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av tre egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier, så er det to muligheter: Enten er $\mathbf{w}$ lik en skalar ganger én av de tre egenvektorene, eller så er $\mathbf{w}$ ikke en egenvektor.

Hvis du fremdeles henger med, så ser du antagelig hvordan vi nå kan gå videre til:

Fire egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier må være lineært uavhengige.

Herfra kan vi fortsette på akkurat samme måte, og vi får de samme resultatene for enhver liste av vilkårlig mange egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier. Da har vi kommet til slutten på vår lange diskusjon om lineær uavhengighet for egenvektorer, og vi oppsummerer det vi har funnet ut i et teorem.

Teorem 7.15. *La $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_t$ være forskjellige egenverdier for en matrise A, og la $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_t$ være egenvektorer som hører til hver av disse egenverdiene. Da har vi:*

(a) Vektorene $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_t$ er lineært uavhengige.

(b) I mengden

$$\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \cdots,\ \mathbf{v}_t\}$$

utspent av egenvektorene vi ser på finnes det ingen andre egenvektorer enn de som er et multippel $c \cdot \mathbf{v}_i$ av én av vektorene i listen.