8 Vektorrom

I de foregående kapitlene har vi tatt en lang vandring gjennom den lineære algebraens jungel. Nå skal vi gå opp på en fjelltopp og skue ut over landskapet vi har vandret gjennom.

Det sentrale temaet i dette kapitlet og det neste er å generalisere og abstrahere ideene vi har jobbet med til nå. Vi skal definere begrepet *vektorrom*, som egentlig bare betyr en mengde med vektorer slik som $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. Men definisjonen vår av vektorrom kommer til å være så generell at vi også kan ha vektorrom som ser helt annerledes ut. Dette betyr at vi skal bli vant til at vektorer kan være mye mer enn kolonnevektorene vi kjenner til – for eksempel kan en funksjon eller en matrise også være en vektor.

I neste kapittel skal vi innføre det andre sentrale konseptet vi trenger for å drive med lineær algebra på en generell måte, nemlig *lineærtransformasjoner*. En lineærtransformasjon er en funksjon fra et vektorrom til et annet. Men den kan ikke være en hvilken som helst funksjon – vi krever at den skal *bevare vektorromsstrukturen*.

Den generelle formuleringen av lineær algebra ved hjelp av vektorrom og lineærtransformasjoner gir flere fordeler. Den gir oss et språk og en del teknikker som (etter hvert som vi blir vant til dem) gjør mange problemer mye mer lettfattelige. Og den gjør at vi kan anvende lineær algebra innen andre områder av matematikk, for eksempel til å løse differensiallikninger, som vi skal se på senere.

Vi kan stille oss selv spørsmålet

Hva handler lineær algebra egentlig om?

Hva som er et naturlig svar på dette spørsmålet endrer seg etter hvert som vi lærer mer lineær algebra. Helt i begynnelsen ville vi antagelig sagt at lineær algebra handler om å løse lineære likningssystemer. Litt senere kunne vi si at lineær algebra handler om vektorer og matriser. Etter at vi har kommet oss gjennom dette kapitlet og det neste, vil vi antagelig besvare spørsmålet med:

Lineær algebra handler om vektorrom og lineærtransformasjoner.

Og da har vi en ganske god forståelse av lineær algebra.

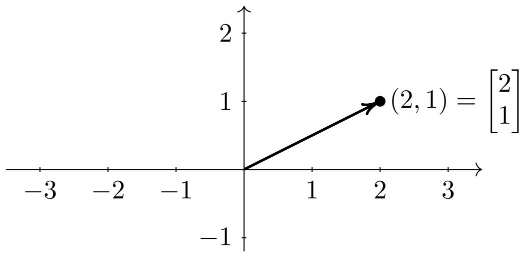
Vektorer slik vi kjenner dem

Vi er vant til vektorer i $\mathbb{R}^2$ og i $\mathbb{R}^3$, og mer generelt i $\mathbb{R}^n$. Vi vet dessuten at hver av disse mengdene utgjør hver sin separate verden av vektorer. For eksempel kan vi alltid legge sammen to vektorer som begge er i $\mathbb{R}^2$, men det gir ikke mening å legge sammen en vektor i $\mathbb{R}^2$ med en vektor i $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix} \quad \text{er ikke definert.}$$

Når vi legger sammen to vektorer i $\mathbb{R}^2$, blir summen igjen en vektor i $\mathbb{R}^2$, og når vi ganger en vektor i $\mathbb{R}^2$ med en skalar, får vi også en vektor i $\mathbb{R}^2$ som resultat. Vi holder oss altså alltid innenfor den samme verdenen når vi tar lineærkombinasjoner av vektorer. En slik verden av vektorer er det vi kaller et vektorrom.

For $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$ har vi en geometrisk tolkning av vektorer: Vi kan tenke på en vektor som et punkt i planet/rommet, eller som pilen som peker fra origo til dette punktet. Men et punkt har også koordinater, og det er de vi vanligvis bruker når vi skal regne på vektorer.



Forskjellige aspekter av samme vektor: punkt – pil – koordinater

Antagelig er du innen nå blitt såpass komfortabel med dette litt fleksible vektorbegrepet at du uten problemer går frem og tilbake mellom å tenke på en vektor som en pil, et punkt, eller en kolonnevektor.

Nå skal vi bli enda mer fleksible i vår forståelse av hva en vektor kan være. Faktisk vil vi si at det er fullstendig likegyldig hva en vektor *er*, det som betyr noe er hvordan den *oppfører seg*.

Hva kan vi gjøre med vektorer?

Vi har to operasjoner for vektorer. Vi kan legge sammen vektorer, og vi kan gange en vektor med en skalar:

$$\text{addisjon av vektorer:} \quad \mathbf{u} + \mathbf{v}$$
$$\text{skalarmultiplikasjon:} \quad c \cdot \mathbf{u}$$

Begge operasjonene gir ut nye vektorer som resultat.

Når vi nå skal generalisere vektorbegrepet, vil vi si at alle slags ting kan være vektorer, så lenge de kan adderes og skalarmultipliseres, og oppfyller visse kriterier som gjør at vi kan regne med dem på samme måte som vi er vant til å regne med vektorer. Disse kriteriene kaller vi *aksiomene* for et vektorrom.

Aksiomer for vektorrom

Aksiomene for vektorrom er åtte regneregler som holder for vektorene i $\mathbb{R}^n$, og som er essensielle for at vektorer skal oppføre seg slik vi synes at vektorer skal oppføre seg. Vi nummerer aksiomene (V1), (V2), ..., (V8). Du finner alle sammen i en fin liste på side 2.

Det første aksiomet, (V1), sier at det ikke har noe å si hvor vi setter parentesene når vi legger sammen vektorer:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

Dette betyr at vi kan skrive en sum

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

Vektorromsaksiomene

aksiomer for addisjon

(V1) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.
(Vektoraddisjon er en *assosiativ* operasjon.)

(V2) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.
(Vektoraddisjon er en *kommutativ* operasjon.)

(V3) Det finnes en vektor $\mathbf{0}$ slik at $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$.
(Vektoraddisjon har et *identitetselement*.)

(V4) For hver vektor $\mathbf{u}$ finnes en vektor $-\mathbf{u}$ slik at $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$.
(Vektoraddisjon har *inverser* for alle elementer.)

aksiomer for skalar-multi-plikasjon

(V5) $(ab)\cdot\mathbf{u}=a\cdot(b\cdot\mathbf{u})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og alle skalarer a og b.
(Skalarmultiplikasjon er *kompatibel* med multiplikasjon av skalarer.)

(V6) $1\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$.
(Tallet 1 er *identitetselement* for skalarmultiplikasjon.)

(V7) $a\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, og alle skalarer a.
(Skalarmultiplikasjon er *distributiv* over addisjon av vektorer.)

(V8) $(a+b)\cdot\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$, og alle skalarer a og b.
(Skalarmultiplikasjon er *distributiv* over addisjon av skalarer.)

uten parenteser, fordi vi får samme resultat om vi legger sammen $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ først, eller legger sammen $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ først. Mer generelt betyr det at vi kan skrive alle slags lengre summer

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots \mathbf{u}_n$$

uten parenteser. På fint matematikkspråk kalles dette at addisjonen er en *assosiativ* operasjon.

Dette ser kanskje så åpenbart ut at det ikke skulle være nødvendig å gjøre noe stort nummer ut av det. Men det er likevel nødvendig å ha det med som et krav, fordi vi i utgangspunktet sier at vi kan definere vektoraddisjonen til å gjøre akkurat hva vi vil, og det er fullt mulig å definere en operasjon som ikke er slik at parenteser kan flyttes fritt.

For å gjøre det helt klart at assosiativitet ikke er noe vi kan ta for gitt, kan det være nyttig å tenke på at du kjenner godt til minst én operasjon som ikke er assosiativ, nemlig opphøyd-i-operasjonen. Med den operasjonen har det en betydning hvor vi setter parentesene, for

$$(a^b)^c \quad \text{og} \quad a^{(b^c)}$$

er ikke det samme.

Aksiom (V2) sier at rekkefølgen ikke spiller noen rolle når vi adderer vektorer:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

Det fine navnet på denne egenskapen er at addisjonen er *kommutativ*.

Aksiom (V3) sier at det skal finnes en *nullvektor*. I $\mathbb{R}^n$ er vi vant til å si at nullvektoren er vektoren som består av bare nuller. Men nå vil vi definere nullvektoren ut fra hvordan den oppfører seg med hensyn på addisjonsoperasjonen. Den definerende egenskapen for en nullvektor $\mathbf{0}$ er at det å legge til nullvektoren ikke endrer noe, altså at

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

for alle vektorer $\mathbf{u}$.

Aksiom (V4) sier at hver vektor har en *additiv invers*. Det betyr at for hver vektor $\mathbf{u}$ skal det være mulig å finne en vektor $\mathbf{v}$ slik at

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Vektoren $\mathbf{v}$ er da den additive inversen til $\mathbf{u}$, og vi kaller den for $-\mathbf{u}$.

De fire første aksiomene handler bare om addisjonsoperasjonen. De fire siste handler om skalarmultiplikasjon.

Aksiom (V5) sier at skalarmultiplikasjonen er *kompatibel* med det å gange sammen tall, i den forstand at å gange en vektor med ett og ett tall er det samme som å gange sammen tallene først og så multiplisere med vektoren:

$$(ab) \cdot \mathbf{u} = a \cdot (b \cdot \mathbf{u})$$

Aksiom (V6) sier at det å gange en vektor med tallet 1 alltid gir oss den samme vektoren tilbake:

$$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

Vi kan altså si at tallet 1 er et *identitetselement* for skalarmultiplikasjonen.

Aksiomene (V7) og (V8) sier at vi kan gange ut parenteser slik vi er vant med, både når vi har en sum av vektorer og når vi har en sum av tall:

$$a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$$
$$(a + b) \cdot \mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$$

Dette kalles at skalarmultiplikasjonen er *distributiv* over addisjon.

Definisjonen av vektorrom

De åtte aksiomene (V1)–(V8) er det vi vil kreve for at noe skal kvalifisere til å være et vektorrom. Nå er vi derfor klare for å skrive ned definisjonen av vektorrom.

Definisjon. La V være en mengde, og anta at vi har definert to operasjoner:

$$\text{addisjon av vektorer: } \mathbf{u} + \mathbf{v}$$
$$\text{skalarmultiplikasjon: } c \cdot \mathbf{u}$$

Addisjonen skal være definert for alle elementer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i V, og skalarmultiplikasjonen for alle skalarer c og alle $\mathbf{u}$ i V. Resultatet av operasjonene skal alltid være et element i V.

Dersom mengden V og de to operasjonene oppfyller vektorromsaksiomene (V1)–(V8), så sier vi at V er et *vektorrom*, og vi kaller elementene i V for *vektorer*. △

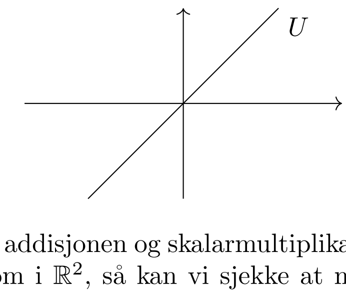
Aksiomene for vektorrom er valgt ut som de egenskapene ved $\mathbb{R}^n$ som anses som å være essensielle. Derfor er selvsagt hver $\mathbb{R}^n$ et vektorrom. Men poenget med å gi en så generell definisjon er at det også finnes flere vektorrom enn disse.

Som et første eksempel kan vi se at en delmengde av $\mathbb{R}^n$ også kan være et vektorrom.

Eksempel 8.1. Se på mengden

$$U = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

utspent av vektoren $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ i $\mathbb{R}^2$, altså denne linjen:



Hvis vi lar addisjonen og skalarmultiplikasjonen være definert som i $\mathbb{R}^2$, så kan vi sjekke at mengden U i seg selv også blir et vektorrom.

Resultatet av å addere eller skalarmultiplisere vektorer i U blir alltid en vektor i U, slik at det gir mening å definere operasjonene på denne måten.

Nullvektoren $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ i $\mathbb{R}^2$ er med i U og fungerer også som nullvektor for U, slik at aksiom (V3) er oppfylt. For alle vektorer $\mathbf{u}$ i U er også den additive inversen $-\mathbf{u}$ med i U, slik at aksiom (V4) er oppfylt. Vi ser lett at alle de andre aksiomene også holder for U, siden de holder for $\mathbb{R}^2$.

Vektorrommet U er geometrisk sett en linje, akkurat som $\mathbb{R}^1$. Det fungerer altså litt som å plassere en kopi av $\mathbb{R}^1$ på skrå inne i $\mathbb{R}^2$. △

Eksempler på vektorrom

La oss nå se på noen vektorrom som er virkelig forskjellige fra de gamle og kjente rommene $\mathbb{R}^n$. Vektorrommene vi definerer her vil vi bruke senere, så det er lurt å prøve å bli kjent med dem. For hvert av disse vektorrommene er det lett (men litt tid- og plasskrevende) å sjekke at alle vektorromsaksiomene holder. Du bør prøve å sjekke det selv, for i hvert fall ett av vektorrommene vi ser på.

Polynomer av begrenset grad. Vi skriver $\mathcal{P}_n$ for mengden av alle polynomer av grad n eller lavere, altså alle funksjoner på formen

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= \sum_{i_0}^{n} a_i x^i. \end{aligned}$$

Vi definerer addisjon og skalarmultiplikasjon av polynomer på den åpenbare måten. Hvis

$$p(x) = \sum_{i_0}^{n} a_i x^i \quad \text{og} \quad q(x) = \sum_{i_0}^{n} b_i x^i$$

er to polynomer i $\mathcal{P}_n$, så er summen $p+q$ polynomet der vi summerer koeffisientene fra p og q:

$$(p+q)(x) = \sum_{i_0}^{n} (a_i + b_i) \cdot x^i$$

Skalarmultiplikasjonen definerer vi ved at $c \cdot p$ er polynomet der vi ganger alle koeffisientene i p med c:

$$(cp)(x) = \sum_{i_0}^{n} (c \cdot a_i) \cdot x^i$$

Med disse operasjonene er $\mathcal{P}_n$ et vektorrom.

Alle polynomer. Vi skriver $\mathcal{P}$ for mengden av alle polynomer av vilkårlig grad. Med addisjon og skalarmultiplikasjon definert som i $\mathcal{P}_n$ blir $\mathcal{P}$ også et vektorrom.

Eksempel 8.2. Vi ser på tre funksjoner f, g og h, gitt ved

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, \\ g(x) &= 3x^2 + x, \\ h(x) &= x^2. \end{aligned}$$

Disse er polynomer av grad 2, så de er vektorer i vektorrommet $\mathcal{P}_2$. Dette betyr at vi kan regne med dem som vektorer – vi kan for eksempel ta lineærkombinasjoner av dem. Lineærkombinasjonen $5f + g$ blir funksjonen gitt ved

$$(5f + g)(x) = 5 \cdot f(x) + g(x) = 8x^2 + x.$$

Siden f, g og h er vektorer, kan vi også spørre om de er lineært uavhengige. Ved å prøve oss frem litt med lineærkombinasjoner av de tre vektorene, finner vi ganske raskt ut at

$$-4f + g + h = 0,$$

som betyr at f, g og h er lineært avhengige. △

Kontinuerlige funksjoner. Vi skriver $\mathcal{C}(D)$ for mengden av alle kontinuerlige funksjoner definert på et område D, der $D \subseteq \mathbb{R}$. Mengden $\mathcal{C}(D)$ består altså av alle funksjoner som er på formen

$$f\colon D \to \mathbb{R}$$

og er kontinuerlige.

Vi kan definere addisjon og skalarmultiplikasjon av funksjoner på en naturlig måte. Summen $f+g$ av to funksjoner f og g blir en funksjon gitt ved

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

og produktet cf av en skalar c og en funksjon f blir en funksjon gitt ved

$$(cf)(x) = c \cdot (f(x)).$$

Med disse operasjonene blir mengden $\mathcal{C}(D)$ et vektorrom.

Eksempel 8.3. La f og g være funksjonene gitt ved

$$f(x) = \sin x \qquad \text{og} \qquad g(x) = \cos x.$$

Da kan vi se på f og g som vektorer i vektorrommet $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ av kontinuerlige funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. Er disse to vektorene lineært uavhengige?

For å finne ut det, kan vi huske at vi vet at to vektorer er lineært uavhengige hvis og bare hvis den ene kan skrives som en skalar ganger den andre. Men siden

$$f(0) = \sin 0 = 0 \qquad \text{og} \qquad g(0) = \cos 0 = 1,$$

kan vi ikke ha at g er en skalar ganger f, for da måtte 0 ganger denne skalaren vært 1. Tilsvarende ser vi at siden

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \text{og} \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

kan vi ikke ha at f er en skalar ganger g. Altså er f og g lineært uavhengige vektorer i $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. △

Deriverbare og glatte funksjoner. Vi skriver $\mathcal{C}^1(D)$ for mengden av alle funksjoner

$$f\colon D \to \mathbb{R}$$

som er kontinuerlig deriverbare. Mer generelt skriver vi $\mathcal{C}^n(D)$ for mengden av alle funksjoner som er n ganger kontinuerlig deriverbare. Funksjoner som er deriverbare uendelig mange ganger kalles *glatte* funksjoner, og vi skriver $\mathcal{C}^\infty(D)$ for mengden av alle glatte funksjoner fra D til $\mathbb{R}$.

Med addisjon og skalarmultiplikasjon definert på samme måte som i $\mathcal{C}(D)$ blir mengdene $\mathcal{C}^n(D)$ og $\mathcal{C}^\infty(D)$ også vektorrom.

Uendelige lister. Vi skriver $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ for mengden av alle uendelige lister

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

av reelle tall. Vi definerer addisjon og skalarmultiplikasjon for slike lister ved:

$$\begin{aligned}(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} &= (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}\\ c \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}} &= (c \cdot a_i)_{i\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

Da er $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et vektorrom.

Eksempel 8.4. Se på de tre vektorene

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)\\ \mathbf{v} &= (1, 1, 1, 1, 1, \ldots)\\ \mathbf{w} &= (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)\end{aligned}$$

i vektorrommet $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Er vektoren $\mathbf{w}$ en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$?

Hvis vi ganger $\mathbf{u}$ med to, så får vi:

$$2\mathbf{u} = (2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$$

Nå kan vi trekke fra $\mathbf{v}$ og ende opp med:

$$2\mathbf{u} - \mathbf{v} = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$$

Vi ser altså at $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$, så vi kan konkludere med at vektoren $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. △

Matriser. Vi skriver $\mathcal{M}_{m\times n}$ for mengden av alle $m \times n$-matriser. Vi har allerede (i kapittel 4) definert hvordan vi legger sammen matriser, og hvordan vi ganger en skalar med en matrise. Med disse operasjonene er $\mathcal{M}_{m\times n}$ et vektorrom. Siden kvadratiske matriser er spesielt interessante, definerer vi en egen notasjon, $\mathcal{M}_n$, for vektorrommet som består av alle $n \times n$-matriser.

Underrom

I eksempel 8.1 så vi at en linje i $\mathbb{R}^2$ kunne være et vektorrom i seg selv. Et slikt vektorrom som ligger inni et annet vektorrom kalles et underrom.

Definisjon. Et *underrom* av et vektorrom V er en delmengde $U \subseteq V$ som i seg selv utgjør et vektorrom, med addisjon og skalarmultiplikasjon definert på samme måte som i V. △

Eksempel 8.5. Som i eksempel 8.1 lar vi U være delmengden

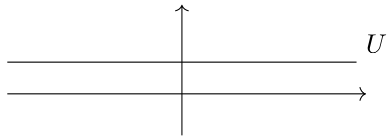
$$U = \operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

av $\mathbb{R}^2$. Da er U et underrom av $\mathbb{R}^2$. △

Eksempel 8.6. Se på mengden

$$U = \left\{\begin{bmatrix}a\\1\end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}\right\}$$

av alle vektorer i $\mathbb{R}^2$ på formen $\left[\begin{smallmatrix}a\\1\end{smallmatrix}\right]$, altså den horisontale linjen vist her:



Er U et underrom av $\mathbb{R}^2$?

Hvis U skal være et underrom, må vi ha at U i seg selv blir et vektorrom når vi bruker vektoraddisjonen og skalarmultiplikasjonen fra $\mathbb{R}^2$. Men det gir ikke fungerende operasjoner på U. For eksempel har vi at $\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$ og $\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$ er vektorer i U, men summen

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

er ikke i U. Operasjonene fra $\mathbb{R}^2$ fungerer altså ikke til å gjøre U til et vektorrom, så U er ikke et underrom av $\mathbb{R}^2$. △

I eksempel 8.6 så vi at mengden U ikke ble et underrom fordi vi ikke holder oss innenfor U når vi legger sammen vektorer fra U. Vi sier da at mengden U ikke er *lukket* under addisjon.

Men hvis vi har en delmengde U av et vektorrom V som *er* lukket under både addisjon og skalarmultiplikasjon, og som inneholder nullvektoren, så blir alle vektorromsaksiomene automatisk oppfylt for U fordi de holder i V. Vi har dermed følgende teorem.

Teorem 8.7. *La V være et vektorrom. En delmgende $U \subseteq V$ er et underrom av V hvis og bare hvis følgende tre betingelser er oppfylt.*

1. *Nullvektoren $\mathbf{0}$ i V ligger i U.*
2. *For alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i U er også summen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ i U.*
3. *For alle vektorer $\mathbf{u}$ i U og alle skalarer c er også produktet $c\mathbf{u}$ i U.*

Det er lett å se at en mengde utspent av en liste med vektorer oppfyller disse tre betingelsene. Vi skriver opp det også som et teorem.

Teorem 8.8. *En mengde $\operatorname{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t\}$ utspent av vektorer i et vektorrom V er alltid et underrom av V.*

Bevis. Mengden $\operatorname{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t\}$ består av alle lineærkombinasjoner av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_t$. Uansett hva disse vektorene er, vet vi at nullvektoren er en lineærkombinasjon av dem. Videre ser vi enkelt at summen av to lineærkombinasjoner blir en ny lineærkombinasjon av de samme vektorene, og at en skalar ganger en lineærkombinasjon igjen blir en lineærkombinasjon. Dermed er alle betingelsene fra teorem 8.7 oppfylt. □

Endeligdimensjonale vektorrom

For vektorrommene $\mathbb{R}^n$ har vi et klart begrep om dimensjon. Vi sier at $\mathbb{R}^2$ er todimensjonalt, at $\mathbb{R}^3$ er tredimensjonalt, og mer generelt at $\mathbb{R}^n$ er n-dimensjonalt.

For et vilkårlig vektorrom V er det ikke like klart hva dimensjonen skal være. Vi skal etter hvert komme frem til at vi har en meningsfylt måte å snakke om dimensjon på også her, men først skal vi foreta en veldig grov inndeling av alle vektorrommene. Vi skiller mellom vektorrom som er endeligdimensjonale (og for disse skal vi om en stund se at vi kan definere en dimensjon) og de som ikke er det (for disse må vi bare nøye oss med å si at dimensjonen er uendelig).

Definisjon. Et vektorrom V er *endeligdimensjonalt* hvis det finnes en endelig mengde som utspenner V. Ellers er V *uendeligdimensjonalt.* △

Alle de «gode gamle» vektorrommene $\mathbb{R}^n$ som vi kjenner fra før er endeligdimensjonale, siden $\mathbb{R}^n$ er utspent av den endelige mengden

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

bestående av de n enhetsvektorene.

Men siden vi tar oss bryet med å definere begrepene endeligdimensjonalt og uendeligdimensjonalt, bør det også finnes eksempler på vektorrom som er uendeligdimensjonale. Flere av vektorrommene vi har sett tidligere i dette kapitlet er uendeligdimensjonale. Vi sjekker at ett av dem er uendeligdimensjonalt nå; de andre skal du få finne ut av selv i oppgavene.

Eksempel 8.9. Vektorrommet $\mathcal{P}$ av alle polynomer er uendeligdimensjonalt. Hvordan kan vi se det? La

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$$

være en endelig mengde av polynomer i $\mathcal{P}$. Hvert av polynomene p_1, p_2, $\ldots$, p_t har en grad. La n være den høyeste av disse gradene. Da kan vi ikke skrive et polynom av grad $n+1$ som en lineærkombinasjon av polynomene $p_1, p_2, \ldots, p_t$, så disse utspenner ikke hele $\mathcal{P}$.

Siden vi kan si dette om enhver endelig mengde, kan det ikke finnes noen endelig mengde som utspenner $\mathcal{P}$. Dermed er $\mathcal{P}$ et uendeligdimensjonalt vektorrom. △

Basis

Vi sa at et vektorrom er endeligdimensjonalt hvis det er utspent av en endelig mengde. Nøkkelen til å definere dimensjonen til et vektorrom er å lete etter en «best mulig» utspennende mengde, der «best» betyr at den ikke inneholder noen overflødige vektorer. En slik mengde kalles en basis for vektorrommet.

Basiser er essensielle for at vi skal kunne definere dimensjonen til et vektorrom, men er også nyttige til mye annet. Et vektorrom som ikke er $\mathbb{R}^n$ kan være vanskelig å jobbe med, men om vi har en basis, blir det mye mer håndterlig.

Definisjon. En *basis* for et vektorrom V er en liste

$$\mathscr{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$$

av vektorer som både utspenner V og er lineært uavhengige. △

Merk. Det er to forskjellige måter å definere en basis på. Enten sier man at en basis er en *mengde* med vektorer, eller så sier man (som vi gjør) at en basis er en *liste* med vektorer. Forskjellen er at i en mengde har ikke elementene noen bestemt rekkefølge, mens i en liste er det ett bestemt element som er det første, ett som er det andre, og så videre.

Det viktigste med en basis er å ha vektorer som utspenner det aktuelle vektorrommet og er lineært uavhengige, og det har man uansett om man velger å plassere dem i en mengde eller en liste. Forskjellen dukker opp når man vil bruke basisen til å innføre koordinater (som vi skal gjøre ganske snart). Da må elementene i basisen ha en rekkefølge. Hvis vi hadde valgt å definere en basis som en mengde, ville vi fått litt ekstra jobb for å få definert koordinater på en skikkelig måte. △

Eksempel 8.10. La oss se på vektorrommet $\mathbb{R}^3$. Vi ser lett at listen

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

bestående av de tre enhetsvektorene er en basis. Men vi kan også finne andre basiser. Enhver liste med tre lineært uavhengige vektorer blir en basis for $\mathbb{R}^3$ (du husker fra teorem 5.12 at tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis de utspenner $\mathbb{R}^3$). Så for eksempel er listen

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} \right)$$

også en basis for $\mathbb{R}^3$. △

Vi ser at vi alltid kan bruke enhetsvektorene til å lage en basis for $\mathbb{R}^n$. Denne basisen,

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right),$$

kalles *standardbasisen* for $\mathbb{R}^n$.

Det som gjør $\mathbb{R}^n$ lettere å jobbe med enn andre vektorrom er at vi har *koordinater.* Enhver vektor i $\mathbb{R}^n$ er en kolonnevektor

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

der v_1 er vektorens første koordinat, v_2 er dens andre koordinat, og så videre. En av de viktigste egenskapene til en basis er at den lar oss innføre koordinater.

Teorem 8.11. *La V være et vektorrom med basis*

$$\mathscr{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n).$$

Da kan hver vektor $\mathbf{v}$ i V skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$$

av basisvektorene i $\mathscr{B}$, på en entydig måte.

Bevis. Det at hver vektor $\mathbf{v}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av basisvektorene følger av at basisvektorene utspenner V. Det at denne lineærkombinasjonen er entydig følger av at basisvektorene er lineært uavhengige. $\square$

Definisjon. Tallene $c_1, c_2, \ldots, c_n$ i teorem 8.11 kalles *koordinatene* til vektoren $\mathbf{v}$ *med hensyn på* basisen $\mathscr{B}$. Vi definerer notasjonen $[\,\mathbf{v}\,]_{\mathscr{B}}$ for vektoren i $\mathbb{R}^n$ som består av koordinatene til $\mathbf{v}$:

$$[\,\mathbf{v}\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$\triangle$

Eksempel 8.12. I eksempel 8.3 så vi at funksjonene sin og cos er lineært uavhengige vektorer i vektorrommet $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ av kontinuerlige funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. Det betyr at hvis vi ser på underrommet

$$U = \operatorname{Sp}\{\sin, \cos\}$$

av $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ utspent av disse to funksjonene, så er

$$\mathscr{B} = (\sin, \cos)$$

en basis for U. La oss nå se på en vektor i U, for eksempel funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 4\sin x - 7\cos x.$$

Koordinatene til f med hensyn på basisen $\mathscr{B}$ er 4 og -7, så koordinatvektoren til f blir vektoren

$$[\,f\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^2$. På denne måten kan vi gå fra å snakke om funksjoner i U til å snakke om vektorer i $\mathbb{R}^2$.

La oss nå se på funksjonen $2f$, som er lineærkombinasjonen

$$2f = 8\sin - 14\cos$$

av vektorene sin og cos. Det betyr at den har koordinatvektor

$$[\,2f\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \end{bmatrix}$$

med hensyn på basisen $\mathscr{B}$. Vi ser at å gange vektoren med 2 tilsvarer å gange koordinatvektoren med 2. $\triangle$

Teorem 8.13. *La V være et vektorrom med basis $\mathscr{B}$. Koordinatene til en lineærkombinasjon av vektorer er den tilsvarende lineærkombinasjonen av koordinatene til hver vektor:*

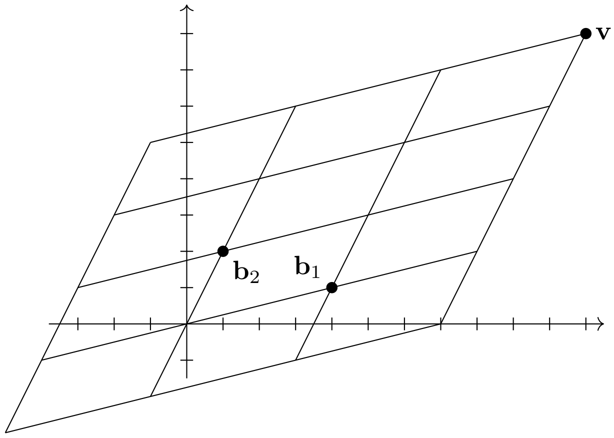
$$\begin{aligned}&[\,c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_t\mathbf{v}_t\,]_{\mathscr{B}} \\ &\qquad = c_1 \cdot [\,\mathbf{v}_1\,]_{\mathscr{B}} + c_2 \cdot [\,\mathbf{v}_2\,]_{\mathscr{B}} + \cdots + c_t \cdot [\,\mathbf{v}_t\,]_{\mathscr{B}}\end{aligned}$$

Hvis vi ser på koordinater med hensyn på standardbasisen i $\mathbb{R}^n$, så tilsvarer det å lage et vanlig koordinatsystem. Men hvis vi ser på koordinater med hensyn på en annen basis for $\mathbb{R}^n$, så tilsvarer det å lage et «skrått» koordinatsystem.

Eksempel 8.14. Vi ser på $\mathbb{R}^2$ med basisen

$$\mathscr{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Det å bruke denne basisen for $\mathbb{R}^2$ tilsvarer å regne i et skrått koordinatsystem der $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ tar rollene som enhetsvektorer:



For eksempel har vektoren $\mathbf{v}$ på tegningen koordinater

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix}$$

med hensyn på standardbasisen, men koordinater

$$[\,\mathbf{v}\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

med hensyn på basisen $\mathscr{B}$. $\triangle$

Nå har vi sett noen eksempler på hva en basis kan brukes til. Videre vil vi vise at det alltid er mulig å finne en basis, forutsatt at vektorrommet vårt er endeligdimensjonalt.

Teorem 8.15. *La V være et endeligdimensjonalt vektorrom. Da kan enhver endelig mengde som utspenner V reduseres til en basis for V. Mer presist: Hvis G er en endelig mengde av vektorer slik at $\operatorname{Sp} G = V$, så finnes en delmengde $B \subseteq G$ slik at vektorene i B utgjør en basis for V.*

Bevis. Det eneste som kan hindre oss fra å bare bruke vektorene i G som en basis er at de kan være lineært avhengige. Så hvis vektorene i G er lineært uavhengige, kan vi bare sette $B = G$, og vi er ferdige.

Anta nå at vektorene i G er lineært avhengige. Da finnes en vektor $\mathbf{v}$ i G som er en lineærkombinasjon av de andre. Vi lager en ny mengde

$$G_1 = G - \{\mathbf{v}\}$$

der vi har fjernet denne vektoren. Siden $\mathbf{v}$ er en lineærkombinasjon av vektorene i G_1, får vi at G_1 utspenner det samme som G, altså hele vektorrommet V.

Nå kan vi fortsette på samme måte med å fjerne ett og ett element så lenge vektorene i mengden vår er lineært avhengige. Da får vi stadig nye delmengder

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots$$

som alle utspenner hele V. Siden G er en endelig mengde, kan vi ikke fortsette slik som dette i det uendelige, og på et eller annet punkt må vi derfor få en mengde av lineært uavhengige vektorer. Disse vektorene utgjør en basis for V. □

Siden et endeligdimensjonalt vektorrom per definisjon er utspent av en endelig mengde, viser dette teoremet at det alltid finnes en basis for et slikt rom. Vi skriver dette enda tydeligere i et nytt teorem.

Teorem 8.16. *Ethvert endeligdimensjonalt vektorrom har en basis.*

Vi så over at enhver endelig mengde som utspenner et vektorrom kan reduseres til en basis. På samme måte kan enhver mengde som er lineært uavhengig utvides til en basis.

Teorem 8.17. *La V være et endeligdimensjonalt vektorrom. Enhver endelig mengde av vektorer i V som er lineært uavhengig kan utvides til en basis. Mer presist: Hvis L er en endelig mengde av vektorer som er lineært uavhengige, så finnes en basis for V som inneholder alle vektorene i L.*

Dimensjon

Nå som vi vet at alle endeligdimensjonale vektorrom har basis, kan vi bruke det til å definere dimensjonen til et vektorrom. Vi vil si at dimensjonen til et vektorrom er antall vektorer i basisen, men før vi kan si det, må vi forsikre oss om at forskjellige basiser for det samme rommet ikke kan ha forskjellig antall elementer.

Vi begynner med å generalisere et kjent resultat fra $\mathbb{R}^n$ til et vektorrom med basis. Vi husker fra teorem 5.10 at hvis vi har en liste med mer enn n vektorer i $\mathbb{R}^n$, så må vektorene i listen være lineært avhengige. Det tilsvarende utsagnet formulert med utgangspunkt i en basis sier at hvis vi har en liste med flere vektorer enn størrelsen på basisen, så må disse vektorene være lineært avhengige.

Teorem 8.18. *La V være et vektorrom med en basis $\mathscr{B}$ som består av n vektorer. La $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_m$ være m vektorer i V, der $m > n$. Da er disse vektorene lineært avhengige.*

Bevis. La

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= [\,\mathbf{v}_1\,]_{\mathscr{B}} \\ \mathbf{u}_2 &= [\,\mathbf{v}_2\,]_{\mathscr{B}} \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_m &= [\,\mathbf{v}_m\,]_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

være koordinatvektorene til vektorene vi ser på, med hensyn på basisen $\mathscr{B}$. Da er $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_m$ en liste med m vektorer i $\mathbb{R}^n$, og siden $m > n$ vet vi da fra teorem 5.10 at de er lineært avhengige. Det vil si at det finnes skalarer c_1, c_2, …, c_m (som ikke alle er 0) slik at

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots c_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}.$$

Uttrykket på venstresiden her er det samme som

$$c_1[\,\mathbf{v}_1\,]_{\mathscr{B}} + c_2[\,\mathbf{v}_2\,]_{\mathscr{B}} + \cdots + c_m[\,\mathbf{v}_m\,]_{\mathscr{B}},$$

og ved teorem 8.13 er dette igjen det samme som

$$[\,c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots c_m\mathbf{v}_m\,]_{\mathscr{B}}.$$

Vi har altså at

$$[\,c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots c_m\mathbf{v}_m\,]_{\mathscr{B}} = \mathbf{0},$$

og dermed må vi ha

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0},$$

Dette betyr at vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_m$ er lineært avhengige. □

Ved hjelp av dette teoremet ser vi at alle basiser for samme vektorrom må ha like mange elementer.

Teorem 8.19. *La V være et endeligdimensjonalt vektorrom. Da har enhver basis for V samme størrelse.*

Bevis. Anta at vi har to basiser

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_1 &= (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) \\ \mathscr{B}_2 &= (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m) \end{aligned}$$

for V. Hvis $m > n$, så sier teorem 8.18 at vektorene

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_m$$

er lineært avhengige, men det kan de ikke være siden $\mathscr{B}_2$ er en basis. Det er altså ikke mulig at $m > n$. På samme måte viser vi at det ikke er mulig at $n > m$. Da er det bare én mulighet igjen, nemlig at $m = n$, altså at basisene har samme størrelse. □

Nå som vi vet at alle basiser for samme vektorrom har samme størrelse, kan vi trygt definere dimensjonen til et vektorrom som størrelsen til en hvilken som helst basis for vektorrommet.

Definisjon. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom. Vi definerer *dimensjonen* til V som antall vektorer i en basis for V. Vi bruker notasjonen $\dim V$ for dimensjonen til V. Hvis $\mathscr{B}$ er en basis for V, har vi altså

$$\dim V = |\mathscr{B}|.$$ △

Det er en enkel og grei sammenheng mellom dimensjon og underrom: Et underrom kan aldri ha større dimensjon enn vektorrommet det er underrom av. Vi formulerer dette som et teorem.

Teorem 8.20. *La V være et vektorrom med et underrom U. Hvis V er endeligdimensjonalt, så er U også endeligdimensjonalt, og*

$$\dim U \leq \dim V.$$

Vektorrom tilknyttet en matrise

Hittil i dette kapitlet har vi vært veldig generelle og abstrakte, og ting har kanskje blitt litt høytflyvende. Vi avslutter kapitlet med noe litt mer håndfast, der vi ikke trenger å tenke på helt generelle vektorrom, men bare på underrom av $\mathbb{R}^n$.

Hvis A er en $m \times n$-matrise, så er det visse underrom av $\mathbb{R}^n$ og av $\mathbb{R}^m$ som er nært knyttet til A, og det er noen interessante sammenhenger mellom disse rommene.

Nullrommet. Vi definerer *nullrommet* til en $m \times n$-matrise A som løsningsmengden til likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, altså delmengden

$$\operatorname{Null} A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

av $\mathbb{R}^n$. I utgangspunktet er dette bare en mengde av vektorer i $\mathbb{R}^n$, men vi kan raskt finne ut at det faktisk er et underrom ved å sjekke at det oppfyller de tre kriteriene i teorem 8.7:

1. Vi ser at nullvektoren er i $\operatorname{Null} A$, siden den er en løsning av likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2. Hvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er vektorer i $\operatorname{Null} A$, så har vi at $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ og $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Da får vi

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

som betyr at summen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ også er i $\operatorname{Null} A$.

3. Hvis $\mathbf{u}$ er i $\operatorname{Null} A$ og c er en skalar, så får vi

$$A \cdot (c \cdot \mathbf{u}) = c \cdot (A\mathbf{u}) = c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

slik at $c \cdot \mathbf{u}$ også er i $\operatorname{Null} A$.

Kolonnerommet. Vi definerer *kolonnerommet* til en $m \times n$-matrise

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

som underrommet av $\mathbb{R}^m$ utspent av kolonnene i A:

$$\operatorname{Col} A = \operatorname{Sp}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$$

Kolonnerommet til A består altså av alle lineærkombinasjoner av kolonnene i A. Siden et produkt $A\mathbf{v}$ av matrisen A og en vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ er definert til å være nettopp en lineærkombinasjon av kolonnene i A, kan vi også beskrive kolonnerommet som alle vektorer som er på formen $A\mathbf{v}$:

$$\operatorname{Col} A = \{A\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$$

Radrommet. Vi definerer *radrommet* til en $m \times n$-matrise

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^\top \\ \mathbf{r}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^\top \end{bmatrix}$$

som underrommet av $\mathbb{R}^n$ utspent av radene i A:

$$\operatorname{Row} A = \operatorname{Sp}\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m\}$$

Radrommet til A består altså av alle lineærkombinasjoner av radene i A (der vi ser på radene som kolonnevektorer). Dette er det samme som kolonnerommet til den transponerte matrisen:

$$\operatorname{Row} A = \operatorname{Col} A^\top$$

Vi tar nå et ganske langt eksempel der vi ser på hva vi kan si om nullrommet, kolonnerommet og radrommet til en matrise.

Eksempel 8.21. La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 15 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi vil prøve å beskrive nullrommet, kolonnerommet og radrommet til A.

For å finne nullrommet, må vi løse likningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Det gjør vi ved å gausseliminere matrisen A. Da får vi (her er mellomregningen utelatt):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 15 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får tre frie variabler, og den generelle løsningen blir:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Dette betyr at de tre vektorene

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

utspenner nullrommet til A. De er dessuten lineært uavhengige: Legg merke til at i posisjon to, fire og fem – som tilsvarer de tre frie variablene – har én av vektorene tallet 1 og de andre to tallet 0. Dermed ser vi lett at ingen av dem kan være en lineærkombinasjon av de to andre, slik at de må være lineært uavhengige. Dette betyr at

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

er en basis for nullrommet $\operatorname{Null} A$.

Når det gjelder kolonnerommet og radrommet, har vi direkte fra definisjonene at dissee rommene kan beskrives slik:

$$\operatorname{Col} A = \operatorname{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{Row} A = \operatorname{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Men her har vi bare en utspennende mengde for hvert av rommene. Den beste måten å beskrive et vektorrom på er å gi en basis. Det viser seg at vi kan finne basiser for kolonnerommet og radrommet til A ved å se på hva som skjer når vi gausseliminerer A.

La oss ta kolonnerommet først. Se på trappeformmatrisen vi endte opp med. Den har pivotelementer i første og tredje kolonne. Hvis vi stokker om på kolonnene i A slik at første og tredje kolonne kommer først, og gjør det samme med trappeformmatrisen, så blir disse matrisene også radekvivalente (fordi dette tilsvarer at vi bytter om kolonnene på samme måte i hver matrise vi får underveis i gausselimineringen):

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 15 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La oss nå lage en matrise

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

av første og tredje kolonne i A (de to kolonnene som ender opp med pivotelementer i trappeformmatrisen), og la oss kalle de tre andre kolonnene i A for

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Matrisen vi fikk ved å stokke om kolonnene i A kan da beskrives som

$$\left[\begin{array}{c|ccc} C & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{array}\right].$$

Vi ser fra trappeformmatrisen at kolonnene i C er lineært uavhengige, og at systemene

$$C\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \quad C\mathbf{x} = \mathbf{b}_2 \quad \text{og} \quad C\mathbf{x} = \mathbf{b}_3$$

har løsninger, slik at hver av vektorene $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ og $\mathbf{b}_3$ er en lineærkombinasjon av kolonnene i C. Dette betyr at

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$$

er en basis for kolonnerommet $\operatorname{Col} A$.

Det er litt enklere å se hvordan gausseliminasjonen gir oss en basis for radrommet. Vi kan se at hvis to matriser er radekvivalente, så har de samme radrom. Når vi utfører en radoperasjon er det nemlig slik at alle rader i den nye matrisen er lineærkombinasjoner av radene i den gamle matrisen (dette kan du ganske enkelt sjekke selv). Dessuten kan vi alltid finne en «omvendt» radoperasjon som tar oss tilbake til den gamle matrisen, slik at alle rader i den gamle matrisen er lineærkombinasjoner av radene i den nye. Altså har matrisene samme radrom.

Dette betyr at for å beskrive radrommet til A kan vi like godt se på trappeformmatrisen vi fikk ved å gausseliminere A. Der ser vi lett at alle radene som ikke er nullrader må være lineært uavhengige. Vi får dermed at

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

er en basis for radrommet $\operatorname{Row} A$. △

Metodene vi brukte i eksempelet for å finne basiser for nullrommet, kolonnerommet og radrommet fungerer generelt for en hvilken som helst matrise. Vi ser dermed at vi kan beskrive dimensjonene til disse tre rommene ved hjelp av antall frie variabler og antall pivotelementer i trappeformmatrisen.

Teorem 8.22. *La A være en $m \times n$-matrise, og la E være trappeformmatrisen vi får når vi gausseliminerer A. Da har vi:*

(a) Dimensjonen til nullrommet til A er lik antall frie variabler vi får når vi løser likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, altså antall kolonner uten pivotelement i E.

(b) Dimensjonen til kolonnerommet til A er lik antall kolonner med pivotelementer i E.

(c) Dimensjonen til radrommet til A er lik antall rader som ikke er null i E.

Siden det er ett pivotelement i hver rad som ikke er null, får vi ved å kombinere del (b) og (c) i dette teoremet at kolonnerommet og radrommet har samme dimensjon. Vi skriver opp dette også som et teorem.

Teorem 8.23. *La A være en $m \times n$-matrise. Da har kolonnerommet og radrommet til A samme dimensjon:*

$$\dim \operatorname{Col} A = \dim \operatorname{Row} A$$

Dette ene tallet, som både er dimensjonen til kolonnerommet og dimensjonen til radrommet, kalles *rangen* til matrisen. Vi skriver:

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col} A = \dim \operatorname{Row} A$$

Siden enhver kolonne i trappeformmatrisen enten inneholder et pivotelement eller gir opphav til en fri variabel for likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, får vi følgende resultat ved å kombinere del (a) og (b) fra teorem 8.22.

Teorem 8.24. *La A være en $m \times n$-matrise. Da er*

$$\dim \operatorname{Null} A + \operatorname{rank} A = n.$$