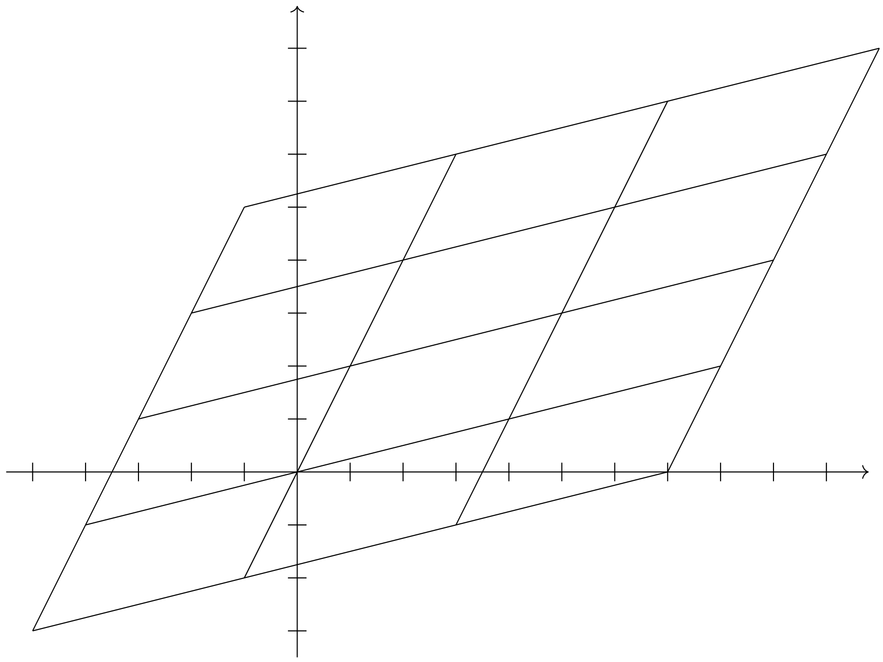
TMA*4110*

Matematikk 3

Notater høsten 2018



Øystein Skartsæterhagen

Morten Andreas Nome

Paul Trygsland

Innhold

Introduksjon

Velkommen til emnet TMA4110 Matematikk 3.

Vi som underviser emnet høsten 2018 har valgt å skrive notater som inneholder det vi gjennomgår i forelesningene, og resultatet er det du leser nå. Pensum for emnet er det som står i disse notatene – hverken mer eller mindre.

Vi begynner med å ta et overblikk over temaene vi skal innom i løpet av semesteret. Det gjør ikke noe om du ikke forstår alt i denne introduksjonen nå; vi skal gjennomgå det i detalj siden. Men forhåpentligvis får du en idé om hva emnet inneholder.

Emnet er delt inn i tre separate deler som egentlig hører til helt forskjellige områder innenfor matematikk:

1. Lineær algebra
2. Komplekse tall
3. Lineære differensiallikninger

Delen om lineær algebra utgjør hoveddelen av emnet og er den vi vil bruke mest tid på.

Grunnen til at disse tilsynelatende urelaterte temaene er gruppert sammen i ett emne er at det er noen viktige tilknytningspunkter mellom dem som gjør at det er fornuftig å lære om dem sammen.

Lineær algebra

Algebra er et område innenfor matematikk som i utgangspunktet handler om å løse likninger. For å få en idé om hva algebra er for noe, kan det være nyttig å vite hva det *ikke* er. Her er en liten guide til hvordan noen av de tingene du antagelig har gjort i ditt matematiske liv så langt passer inn i ulike områder innen matematikk:

Hvis du deriverer eller integrerer, så driver du med *analyse*. Hvis du tegner en figur, driver du antagelig med *geometri*. Hvis du teller antall måter du kan plukke opp forskjellige fargede kuler fra en pose på, så driver du med *kombinatorikk*; men hvis du deretter regner ut sannsynligheten for at du får to røde kuler, så har du flyttet deg over til *sannsynlighetsregning*. Hvis du prøver å forstå reglene for hvordan et matematisk bevis utføres, så driver du med *logikk*. Og hvis du løser en likning, da driver du med algebra.

Da du for eksempel (en gang for mange år siden) lærte at en andregradslikning

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kan løses ved hjelp av formelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

så var det en del av den klassiske, grunnleggende algebraen du lærte.

Ordet «algebra» kommer av det arabiske *al-jabr*, som var en del av tittelen på en bok skrevet omkring år 820 av den persiske matematikeren al-Khwarizmi. Denne boken inneholdt metoder for å løse likninger (blant annet andregradslikningen nevnt over), og la grunnlaget for algebra som fagområde.

Men så er det slik med matematikk at den stadig endrer seg. Matematisk forskning er en evig runddans av at matematikere finner opp nye teknikker og konsepter for å finne svar på spørsmål de synes er interessante, og så finner de ut at man kan stille nye interessante spørsmål om de nye tingene de har funnet opp, og så har man det gående.

I løpet av 1800-tallet og begynnelsen på 1900-tallet førte den matematiske utviklingen til at algebraen som fagfelt skiftet fokus. Man utviklet visse former for matematiske strukturer som ble brukt til å forstå ulike typer likninger, og over tid fant man ut at disse strukturene kunne generaliseres og være nyttige også til andre ting enn løsing av likninger. Dermed endte man opp med forskjellige typer *abstrakte algebraiske strukturer* (noen av disse kalles *grupper*, *ringer* og *moduler*), og algebra i dag handler primært om å forstå disse strukturene. Denne nye formen for algebra kalles *abstrakt algebra* (eller *moderne algebra*), for å skille den fra den mer tradisjonelle algebraen som handler om løsing av likninger.

Greit, det var veldig mye prat om algebra. Men hva er *lineær algebra* for noe?

Algebra handler opprinnelig om likninger, og lineær algebra er den delen av algebraen som handler om lineære likninger.

En lineær likning med én ukjent ser generelt slik ut:

$$ax = b$$

Dersom $a \neq 0$, kan vi løse denne likningen ved å dele på a:

$$x = b/a$$

Og det er egentlig omtrent alt som er å si om lineære likninger med én ukjent.

Men hvis vi ser på et system av flere lineære likninger, med flere ukjente, blir det straks mer interessant. Her er et eksempel på et system av lineære likninger:

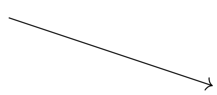
$$\begin{cases} 3x + 5y - 2z = 14 \\ x - 9y + 7z = 0 \\ -5x + 4y + 8z = -3 \end{cases}$$

Studiet av slike systemer er utgangspunktet for lineær algebra.

Det første vi skal lære er en metode (som kalles *gausseliminasjon*) for å løse lineære likningssystemer på en effektiv måte.

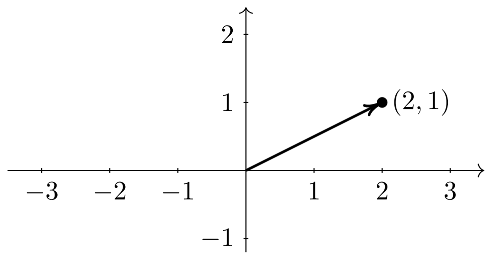
Deretter skal vi se at ved å innføre noen nye konsepter – nemlig *vektorer* og *matriser* – kan vi få en bedre forståelse av lineære likningssystemer.

Du har antagelig hørt om vektorer før, og antagelig har du lært å tenke på en vektor som en pil – noe som har en lengde og en retning.



En pil

Dette er imidlertid bare ett aspekt av vektorer. Vi vil velge å se på et *punkt* i planet, og *pilen* fra origo til dette punktet, og *koordinatene* til punktet, som tre forskjellige representasjoner av den samme vektoren.



Vektorenes treenighet:
punkt – pil – koordinater

Koordinatene som angir en vektor, for eksempel $(2, 1)$, vil vi vanligvis skrive på denne måten:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette kaller vi en *kolonnevektor* (vi kan også si *søylevektor*).

Det er klart at vi kan se på vektorer i to dimensjoner eller i tre dimensjoner – altså i et plan eller i et rom. Men hvis vi tenker på vektorer bare som kolonnevektorer, og glemmer det med punkter og piler, så er det ikke noe i veien for å snakke om vektorer i fire dimensjoner, eller fem, eller så mange dimensjoner vi vil. Og det skal vi gjøre.

Men hva har dette med lineære likningssystemer å gjøre? Vi skal definere aritmetiske operasjoner for vektorer (på ganske naturlige måter), slik at likningssystemet vi så for en stund siden kan skrives på denne måten:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot y + \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot z = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Istedenfor et system med flere likninger har vi altså én likning, der koeffisientene og høyresiden er vektorer. Istedenfor å tenke på problemet som det å finne tall som er løsninger av flere forskjellige likninger, tenker vi på det som å finne ut om visse vektorer kan kombineres slik at vi får en viss annen vektor.

Så innfører vi matriser, som er rektangulære tabeller med tall, og vi kan skrive om systemet vårt til:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -9 & 7 \\ -5 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Her har vi en matrise ganger en vektor på venstresiden, og en vektor på høyresiden. Når vi har lært om matriser, kan vi skrive et generelt lineært likningssystem på den konsise formen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

der A er en matrise, $\mathbf{b}$ er en konstant vektor, og $\mathbf{x}$ er en ukjent vektor.

Men det stopper ikke der! Vi kan snu likheten $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ litt på hodet. Istedenfor å si at $\mathbf{x}$ er en ukjent som vi vil finne, så kan vi si at når matrisen A ganges med en vektor $\mathbf{x}$, så får vi ut en ny vektor $\mathbf{b}$. Med andre ord: En matrise gir opphav til en funksjon som tar inn vektorer og gir ut vektorer. Hvis matrisen har m rader og n kolonner, så kan vi bruke den til å lage en funksjon T som tar inn n-dimensjonale vektorer og gir ut m-dimensjonale vektorer. En slik funksjon kalles en *lineærtransformasjon*, og vi skriver:

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Her står $\mathbb{R}^n$ for mengden av alle n-dimensjonale kolonnevektorer, og en slik mengde kalles et *vektorrom*.

Nå viser det seg at vektorrom, lineærtransformasjoner og matriser er interessante ting å studere i seg selv, og at vi med utgangspunkt i disse tingene kan bygge opp en stor og flott matematisk teori med anvendelsesområder som går langt ut over det å løse likningssystemer. Den teorien er lineær algebra.

Komplekse tall

Hva er et tall? Da du som barn lærte å telle, lærte du tallene

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

Så lærte du å legge sammen tall, og å trekke tall fra hverandre. Da viste det seg at det går an å stille spørsmål som ikke har svar: Hva er $3 - 5$?

Men så lærte du at slike spørsmål likevel kan besvares når man bare har innført noen nye tall:

$$0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots$$

Videre utvidet du tallforståelsen din med *rasjonale tall* (brøker av heltall, for eksempel $7/5$), og så lærte du at det også finnes tall som ikke er rasjonale, for eksempel $\sqrt{2}$ og π. Når vi tar med alle slike tall, har vi mengden av *reelle tall*.

Fremdeles er det spørsmål som ikke kan besvares, for eksempel: Hva er $\sqrt{-1}$? Det finnes ikke noe reelt tall som vi kan opphøye i andre og få -1.

Men denne situasjonen er egentlig helt tilsvarende som da vi bare kjente til de positive tallene og lurte på hva $3-5$ er. Akkurat som vi da kunne utvide tallsystemet ved å legge til negative tall, kan vi nå legge til nye tall som gjør at uttrykket $\sqrt{-1}$ gir mening.

Vi lager et nytt tall, som vi kaller i, og som er definert til å være slik at

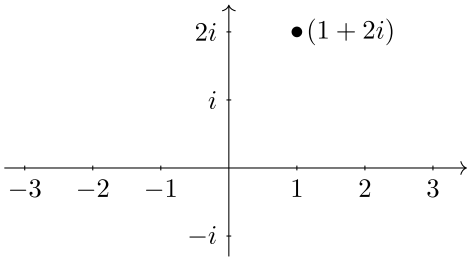
$$i^2 = -1$$

For å få et tallsystem som oppfører seg slik det skal, må vi kunne gange og legge sammen i med et hvilket som helst annet tall. Det gjør at vi må ha med flere nye tall, og til sammen får vi at alle tall som kan skrives som

$$a + bi \qquad \text{(der } a \text{ og } b \text{ er reelle tall)}$$

må være med i det nye tallsystemet. Disse tallene kalles *komplekse tall*.

Mengden av reelle tall visualiserer vi som en uendelig lang tallinje. Mengden av komplekse tall visualiserer vi som et todimensjonalt plan.



Det komplekse planet

Du må ikke la deg lure av navnet til å tro at komplekse tall er kompliserte å ha med å gjøre. På mange måter er det enklere å jobbe med komplekse tall enn med reelle tall.

Innenfor de komplekse tallene kan vi for eksempel alltid ta kvadratrøtter av hvilke som helst tall, uten å måtte tenke på om de er negative. Med andre ord: alle likninger på formen $x^2 = a$ har løsninger. Og ikke bare det, men alle andregradslikninger

$$ax^2 + bx + c = 0$$

har løsninger. Og ikke bare det, men alle polynomlikninger av hvilken som helst grad, altså alle likninger på formen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

har løsninger.

Det som imidlertid kan gjøre komplekse tall litt vanskelige er at de ikke helt passer inn i vår intuitive forståelse av hva et tall skal være. Med reelle tall kan vi lett se for oss hvordan et tall kan representere noe målbart i den virkelige verden: en avstand, et areal, en hastighet eller liknende. Med komplekse tall er det vanskeligere å se for seg hva tallene kan representere.

Når vi får bruk for komplekse tall er det ofte slik at vi starter med noe som bare handler om reelle tall, og får et sluttsvar med bare reelle tall, men må innom de komplekse tallene i mellomregningen. Vi kommer til å se eksempler på nettopp dette når vi i emnets siste del skal løse differensiallikninger.

Lineære differensiallikninger

En *differensiallikning* er en likning der den ukjente er en funksjon, og der den deriverte av denne ukjente funksjonen også er med i likningen.

Vi skal se på to forskjellige typer differensiallikninger. Den ene typen er lineære andreordens differensiallikninger, som vil si likninger på formen

$$y'' + py' + qy = g,$$

der y er en ukjent funksjon av en variabel t, og g er en kjent funksjon av t, og p og q er konstanter.

Når vi skal løse en slik likning får vi bruk for å lage en «hjelpelikning», nemlig andregradslikningen

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

der λ er den ukjente, og p og q er de samme konstantene som vi hadde i differensiallikningen. Det viser seg nemlig at løsningene av denne likningen gir oss viktig informasjon om hvordan løsningene av differensiallikningen ser ut. Men avhengig av hva p og q er, er det ikke sikkert at denne andregradslikningen har noen løsning i reelle tall. Her blir vi reddet av at vi har lært om komplekse tall! Vi kan alltid finne komplekse tall som er løsninger av hjelpelikningen vår, og disse kan vi igjen bruke til å finne løsningene av differensiallikningen vi startet med.

Den andre typen differensiallikninger vi skal se på er systemer av førsteordens lineære differensiallikninger, som vil si likningssystemer på formen

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \quad\vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

der koeffisientene a_{ij} er konstanter og hver x_i er en ukjent funksjon av t.

Når vi har lært om lineær algebra og matriser, ser vi at et slikt system også kan skrives på den mer kompakte formen

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

der $\mathbf{x}$ er en vektorfunksjon og A er en matrise. For å løse systemet vil vi bruke avansert lineær-algebraisk magi som litt forenklet sagt går ut på å vri det n-dimensjonale rommet om til et nytt n-dimensjonalt rom der systemet blir enkelt å løse, så løse det der, og til slutt vri rommet tilbake og ta løsningene med oss.

1 Lineære likningssystemer

Grunnlaget for lineær algebra er *lineære likningssystemer*. Vi starter vår reise inn i den lineære algebraen ved å se på noen forskjellige måter å løse likningssystemer på. Til slutt i dette kapitlet skal vi forsikre oss om at vi er helt enige om nøyaktig hva det vil si at et likningssystem er lineært, og innføre en praktisk måte å skrive lineære likningssystemer på.

Forskjellige fremgangsmåter

Her er et eksempel på et lineært likningssystem:

$$(*) \begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ -x + 6y = 3 \end{cases}$$

I dette systemet har vi to likninger og to ukjente. En løsning av systemet består av to tall som vi kan sette inn for x og y slik at begge likningene er oppfylt samtidig.

Vi kjenner fra før til flere måter å løse et slikt system på. La oss løse systemet over med noen forskjellige metoder.

Eksempel 1.1. Den kanskje mest åpenbare metoden for å løse et likningssystem er å først løse én likning med hensyn på én av de ukjente, og så sette inn i den andre likningen (eller i *de* andre likningene, hvis vi har et system med mer enn to likninger).

For å løse systemet $(*)$ med denne metoden kan vi først løse den andre likningen med hensyn på x; da får vi:

$$x = 6y - 3$$

Så setter vi dette inn i den første likningen og forenkler:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (6y - 3) + 3y &= 9 \\ 12y - 6 + 3y &= 9 \\ 15y &= 15 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Til slutt setter vi denne y-verdien inn i uttrykket vi fant for x, og får:

$$x = 6y - 3 = 6 - 3 = 3$$

Vi har altså funnet ut at for at begge likningene skal være oppfylt, må vi ha at $x = 3$ og $y = 1$. Vi sjekker at dette virkelig er en løsning av $(*)$ ved å sette inn disse verdiene i begge likningene i systemet:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6 + 3 = 9 \\ -x + 6y &= -3 + 6 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

Vi har nå funnet ut at systemet $(*)$ har nøyaktig én løsning, nemlig $x = 3$ og $y = 1$. △

Metoden i eksempelet over er enkel og grei, men kan bli temmelig tungvint å bruke hvis vi har mer enn to ukjente. Vi ser på en annen løsningsmetode for det samme systemet.

Eksempel 1.2. Vi ganger opp den andre likningen med 2, og deretter legger vi sammen de to likningene:

$$\begin{array}{rl} 2x + 3y = 9 & \text{(første likning)} \\ -2x + 12y = 6 & \text{(andre likning ganget med 2)} \\ \hline 15y = 15 & \text{(sum av likningene over)} \end{array}$$

På denne måten får vi x til å forsvinne, og vi står igjen med en likning med bare y.

Den nye likningen $15y = 15$ kan vi forenkle til $y = 1$. Nå kan vi gange opp denne med -3 og legge sammen med den første likningen fra systemet for å få en likning der y forsvinner:

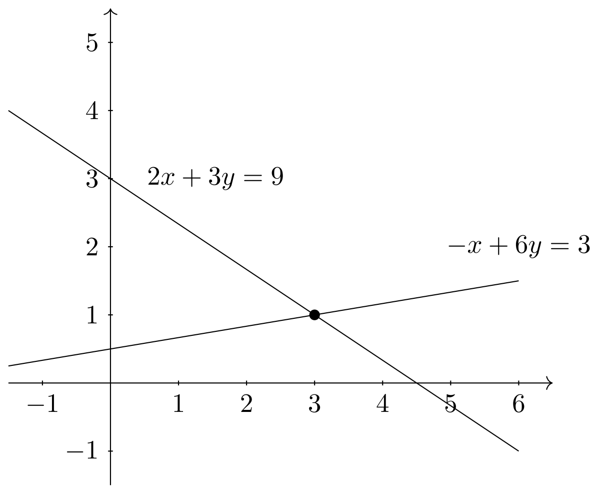
$$\begin{array}{rl} 2x + 3y = 9 & \text{(første likning fra } (*)\text{)} \\ -3y = -3 & \text{(ny likning ganget med } -3\text{)} \\ \hline 2x = 6 & \text{(sum av likningene over)} \end{array}$$

Nå har vi fått en likning med bare x, og vi forenkler den til $x = 3$. Vi har dermed igjen funnet løsningen $x = 3$ og $y = 6$. △

Vi skal etter hvert komme frem til en generell fremgangsmåte for å løse lineære likningssystemer. Den fremgangsmåten baserer seg på å legge sammen likninger slik som vi gjorde nå.

Før vi går videre løser vi systemet vårt en tredje gang, på en helt annen måte:

Eksempel 1.3. Vi kan også løse systemet $(*)$ grafisk. Vi lager et koordinatsystem med en x-akse og en y-akse. Hver av de to likningene $2x + 3y = 9$ og $-x + 6y = 3$ beskriver en rett linje:



Løsningene av $2x + 3y = 9$ er alle punkter som ligger på den ene linjen, mens løsningene av $-x + 6y = 3$ er alle punkter som ligger på den andre linjen. Den felles løsningen av begge likningene er punktet der de to linjene møtes, nemlig $(3, 1)$. Løsningen er altså $x = 3$ og $y = 1$.

Denne metoden er fin for å visualisere problemet og se løsningen på en intuitiv måte, men ikke nødvendigvis den beste for å finne svaret eksakt. Dessuten blir det vanskelig å tegne hvis vi har mer enn to ukjente (men det kan likevel være nyttig å prøve å se for seg løsningene av for eksempel en likning med tre ukjente på en grafisk måte). △

Hva er et lineært likningssystem?

Et lineært likningssystem er et system av lineære likninger. Men nøyaktig hva mener vi med at en likning er lineær?

Ordet «lineær» kommer fra det latinske «linea», som betyr «linje». Hvis vi har en likning med to ukjente, så kan vi tegne grafen til denne likningen. Vi sier at likningen er lineær hvis grafen dens er en rett linje. I eksempelet over så vi at grafene til likningene $2x + 3y = 9$ og $-x + 6y = 3$ er rette linjer. Men det er også lett å finne likninger som ikke har rettlinjede grafer, for eksempel $y = x^2$ eller $x^2 + y^2 = 4$.

Generelt er det slik at grafen til en likning er en rett linje hvis og bare hvis likningen kan skrives på formen

$$ax + by = c,$$

der a, b og c er konstanter.

Når vi vil se på likninger med mer enn to ukjente, gir det ikke lenger mening å snakke om at grafen blir en rett linje. Men det at likningen kan skrives på formen $ax + by = c$ kan vi lett utvide til å ta med flere ukjente, så det er dette vi bruker i den generelle definisjonen av lineære likninger.

Definisjon. En likning med n ukjente x_1, x_2, ..., x_n kalles *lineær* dersom den kan skrives på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b,$$

der a_1, a_2, ..., a_n og b er konstanter. Et *lineært likningssystem* er en samling av én eller flere lineære likninger med de samme ukjente. △

Eksempel 1.4. Her er noen eksempler på lineære likninger:

$$5x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = 27$$
$$17x - 5y = \pi$$

Og her er noen eksempler på likninger som ikke er lineære:

$$2x^2 + y = 3$$
$$x_1 + 2x_1x_2 + x_3 = 1$$

△

Ekvivalente systemer

Vi sier at to likningssystemer er *ekvivalente* dersom de har samme løsninger. Vi kan løse et likningssystem ved å erstatte det med stadig enklere ekvivalente systemer. Vi tar et eksempel for å se hvordan dette kan gjøres.

Eksempel 1.5. La oss løse det følgende lineære likningssystemet:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ x + 5y + 9z = 33 \\ 2x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

Vi vil begynne med å eliminere x-en fra de to siste likningene. Hvis vi trekker den første likningen fra den andre, får vi den nye likningen

$$3y + 11z = 38.$$

Vi bytter ut den andre likningen i systemet med denne nye likningen:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ 3y + 11z = 38 \\ 2x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

Dette systemet er ekvivalent med det vi startet med. Hvorfor er det det? Den nye likningen følger fra to av likningene vi hadde fra før. Dermed må enhver løsning av det opprinnelige systemet også være en løsning av det nye systemet.

Men omvendt er det også slik at den opprinnelige midterste likningen (som vi nå har tatt vekk) kan vi få ved å legge sammen de to første likningene i det nye systemet. Dermed må enhver løsning av det nye systemet også være en løsning av det gamle.

Til sammen betyr dette at de to systemene er ekvivalente.

Vi fortsetter å forenkle systemet. Vi eliminerer x fra den siste likningen ved å trekke fra første likning ganget med 2:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ 3y + 11z = 38 \\ y + 3z = 10 \end{cases}$$

Igjen har vi et nytt system som er ekvivalent med det forrige.

Nå vil vi eliminere y fra den siste likningen. Men det er lettere å eliminere y fra den midterste likningen (ved å trekke fra 3 ganger den siste). Likningenes rekkefølge spiller imidlertid ingen rolle, så vi kan bytte om på de to nederste likningene først:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ y + 3z = 10 \\ 3y + 11z = 38 \end{cases}$$

Så eliminerer vi y fra den siste likningen ved å trekke fra andre likning ganget med 3:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ y + 3z = 10 \\ 2z = 8 \end{cases}$$

Nå ser vi fra den siste likningen at vi må ha:

$$z = 4$$

Ved å sette inn det i den midterste likningen får vi:

$$y = 10 - 3 \cdot 4 = -2$$

Til slutt får vi, ved å sette inn y og z i den øverste likningen:

$$x = -5 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 7$$

Systemet har altså én løsning:

$$x = 7 \qquad y = -2 \qquad z = 4$$

△

Alle likningssystemene vi skrev opp i dette eksempelet er ekvivalente med hverandre, men det siste er mye enklere å håndtere enn det vi startet med. Prosessen vi utførte for å forenkle systemet kalles *gausseliminasjon*, og blir nærmere beskrevet i kapittel 2.

Totalmatrisen til et system

Generelt kan et lineært likningssystem (med m likninger og n ukjente) se slik ut:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Når vi skal løse et slikt system, vil vi skrive opp en rekke nye systemer som er ekvivalent med dette, men som er stadig enklere. Da er det unødvendig tungvint å skrive alle de ukjente og alle +-ene og =-tegnene hver eneste gang. Den eneste informasjonen vi trenger å ha med oss gjennom utregningen er koeffisientene (a-ene) og tallene på høyresiden (b-ene).

Totalmatrisen til et likningssystem er en tabell som inneholder akkurat disse tallene:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Eksempel 1.6. Likningssystemet vi startet med i eksempel 1.5 har følgende totalmatrise:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 1 & 5 & 9 & 33 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \qquad \triangle$$

Den loddrette streken inni matrisen er egentlig ikke nødvendig å ha med, men den er praktisk for å hjelpe oss med å huske at det som står til høyre for streken hører til høyre side av likningene.

Oppgaver

1. Hvilke av disse likningene er lineære?

a) $14x + 3y = 2x + 1 - 5z$

b) $x + 2xy + y = 1$

c) $\frac{x+y}{2} = z$

2. Lag et lineært likningssystem med to likninger og to ukjente som

a) ... har entydig løsning.

b) ... ikke har noen løsning.

c) ... har uendelig mange løsninger.

I hver deloppgave: Tegn grafene til de to likningene i systemet ditt.

3. En lineær likning med to ukjente kan tegnes som en rett linje i x–y-planet.

a) Hvordan kan vi på tilsvarende måte se for oss en lineær likning med tre ukjente?

b) Se på følgende likningssystem:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ \qquad\quad z = 3 \end{cases}$$

Tegn en figur som illustrerer løsningene av hver av disse likningene og løsningene av systemet.

2 Gausseliminasjon

Nå skal vi formalisere ideene fra kapittel 1. Vi skal se hvordan vi kan løse et hvilket som helst lineært likningssystem ved å skrive om totalmatrisen til systemet etter bestemte regler.

Reglene for hvordan totalmatrisen kan skrives om kalles *radoperasjoner*, og målet er å få en matrise som er på *trappeform*. Denne prosessen kalles *gausseliminasjon*.

Radoperasjoner

Følgende tre måter å endre en matrise på kalles *radoperasjoner*:

1. Gange alle tallene i en rad med det samme tallet (ikke 0).
2. Legge til (et multiplum av) en rad i en annen.
3. Bytte rekkefølge på radene.

Vi sier at to matriser er *radekvivalente* hvis vi kan komme fra den ene til den andre ved å utføre en eller flere radoperasjoner. Vi bruker notasjonen $M \sim N$ for å si at to matriser M og N er radekvivalente.

Eksempel 2.1. Disse matrisene er radekvivalente, siden vi får den andre matrisen fra den første ved å gange øverste rad med 4:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 8 & 20 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \end{array}\right]$$

Merk at vi også kan gå motsatt vei: Ved å gange øverste rad i den andre matrisen med $1/4$ får vi tilbake den første matrisen.

Disse to matrisene er også radekvivalente:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 9 & 5 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Her har vi brukt den andre typen radoperasjon: Vi la til -3 ganger øverste rad i nederste rad for å komme fra den første matrisen til den andre. Merk igjen at vi også kan gå motsatt vei: Ved å legge til 3 ganger øverste rad i nederste rad, kommer vi fra den andre matrisen til den første. △

Hele poenget med radoperasjoner er at det å utføre en radoperasjon på en totalmatrise tilsvarer å skrive om likningssystemet til et nytt system som er ekvivalent med det opprinnelige. Vi formulerer dette som et teorem:

Teorem 2.2. *Hvis to likningssystemer har radekvivalente totalmatriser, så er de to likningssystemene ekvivalente.*

Bevis. For å bevise dette, er det nok å vise at det å gjøre en radoperasjon på totalmatrisen til et likningssystem tilsvarer å gjøre en gyldig omskrivning av systemet selv.

Den første typen radoperasjon – å gange alle tallene i en rad med samme tall – tilsvarer å gange med det samme tallet på begge sider av en ligning. Litt mer detaljert: La oss si at

$$a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in} \mid b_i$$

er en av radene i totalmatrisen, og at vi ganger opp denne med tallet c slik at vi får:

$$(ca_{i1})\ (ca_{i2})\ \cdots\ (ca_{in}) \mid (cb_i)$$

Dette tilsvarer at vi bytter ut likningen

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

med den nye likningen

$$(ca_{i1})x_1 + (ca_{i2})x_2 + \cdots + (ca_{in})x_n = cb_i.$$

Men det er klart at hvis den opprinnelige likningen var sann, så må også den nye være det. Og siden det ikke tillates at tallet c som vi ganger med er 0, så har vi også det motsatte: Hvis den nye likningen er sann, så må også den opprinnelige være det. Altså gjør vi ingen endring i løsningene av likningssystemet ved å utføre denne typen radoperasjon.

For den andre typen radoperasjon – legge til et multiplum av en rad i en annen – kan vi på tilsvarende måte se at den nye raden vi lager tilsvarer en likning som må være sann hvis de gamle likningene var sanne. Sett at vi legger til c ganger rad i i rad j. Dette tilsvarer at vi ganger opp den i-te likningen med c, og legger til resultatet i den j-te likningen. Alle løsninger av de gamle likningene må da også være løsninger av denne nye likningen. Dessuten kan vi komme tilbake til det gamle systemet (ved å legge til $-c$ ganger rad i i rad j), og dermed må alle løsninger av det nye systemet også være løsninger av det gamle.

Den tredje og siste typen radoperasjon – bytte rekkefølge på radene – gjør åpenbart ingen endringer i løsningene av likningssystemet, siden dette bare tilsvarer å skrive likningene i en annen rekkefølge. ☐

Eksempel 2.3. Vi gjentar regningen i eksempel 1.5, denne gangen ved å utføre radoperasjoner på totalmatrisen til likningssystemet:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 1 & 5 & 9 & 33 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 11 & 38 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 11 & 38 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 3 & 11 & 38 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Her gjorde vi følgende radoperasjoner: Legge til -1 ganger første rad i andre rad, legge til -2 ganger første rad i tredje rad, bytte andre og tredje rad, og legge til -3 ganger andre rad i tredje rad.

Den siste matrisen her er på det som kalles trappeform, og da er det (som vi så i eksempel 1.5) lett å finne løsningen. Hvis vi vil gjøre det enda lettere, kan vi fortsette med radoperasjoner til vi oppnår det som kalles *redusert trappeform*:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Den siste totalmatrisen her svarer til følgende likningssystem:

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Her har vi altså kommet helt frem til løsningen. △

Trappeform

Vi vil nå gi en presis definisjon av begrepene «trappeform» og «redusert trappeform». Da trenger vi også et annet begrep, nemlig «pivotelement».

Definisjon. Det første tallet i en rad i en matrise som ikke er 0 kalles *pivotelementet* for den raden. (En rad med bare nuller har ikke noe pivotelement.) △

Eksempel 2.4. Se på følgende matrise:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 12 \\ 1 & 8 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivotelementene her er tallet 3 i den øverste raden, tallet 5 i den andre raden og tallet 1 i den tredje raden. Den siste raden består av bare nuller, og har derfor ikke noe pivotelement. △

Definisjon. En matrise er på *trappeform* dersom hvert pivotelement er til høyre for alle pivotelementer i tidligere rader, og eventuelle nullrader er helt nederst. △

Eksempel 2.5. Denne matrisen er på trappeform:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pivotelementene er 3, 1 og 2, og hvert av dem er til høyre for alle de tidligere pivotelementene.

Denne matrisen er også på trappeform:

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen er ikke på trappeform fordi nullradene ikke er samlet nederst:

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen ser «trappete» ut, men er likevel ikke på trappeform:

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Grunnen til at den ikke er på trappeform er at pivotelementet 9 i tredje rad ikke er til høyre for pivotelementet i andre rad, men rett under det isteden. △

Definisjon. En matrise er på *redusert trappeform* hvis den er på trappeform og dessuten oppfyller:

- Alle pivotelementene er 1.
- Alle tall som står over pivotelementer er 0. △

Den siste matrisen i eksempel 2.3 er på redusert trappeform, og der så vi også hva som gjør redusert trappeform nyttig: Løsningen av systemet kan leses av direkte.

Det å skrive om en matrise til trappeform ved hjelp av radoperasjoner kalles *gausseliminasjon*, oppkalt etter den tyske matematikeren Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Noen velger også å ha et eget navn på det å komme frem til *redusert* trappeform, og kaller den prosessen for *Gauss–Jordan-eliminasjon*, oppkalt etter Wilhelm Jordan (1842–1899). Vi tar det ikke så nøye med den forskjellen, og sier «gausseliminasjon» uansett.

(Disse begrepene er uansett historisk sett fullstendig misvisende. Metoden som vi kaller gausseliminasjon var kjent i Kina for flere tusen år siden, og Gauss – som riktignok var et universalgeni og fant opp mengder av flotte ting – har ikke egentlig så mye med den å gjøre.)

Eksistens og entydighet av løsninger

Når vi vil løse et likningssystem, er det noen åpenbare spørsmål vi kan stille:

- Har systemet noen løsning? (*Eksistens*)
- Hvis systemet har løsning: Har det også flere løsninger, eller bare én? (*Entydighet*)

I eksempel 2.3 hadde vi et system med entydig løsning. Vi tar noen flere eksempler for å vise andre ting som kan skje.

Eksempel 2.6. La oss løse følgende system:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -5x + 10y = -1 \end{cases}$$

Vi setter opp totalmatrisen og gausseliminerer:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 10 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Den siste matrisen svarer til følgende system:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0x + 0y = 4 \end{cases}$$

Likningen $0x + 0y = 4$ kan også skrives som $0 = 4$, og den kan ikke stemme uansett hva vi setter x og y til å være. Dette systemet har altså ingen løsning. △

Generelt er det slik at hvis vi får en rad i totalmatrisen vår på formen

$$0\ 0\ \cdots\ 0 \mid b,$$

der b er et tall som ikke er 0, så har systemet ingen løsning. Denne raden svarer jo til likningen $0 = b$, som ikke kan være sann. Hvis vi har en matrise på trappeform der ingen av radene er på denne formen, så har systemet minst én løsning.

Men et lineært likningssystem kan også ha mer enn én løsning, som vi skal se i det neste eksempelet.

Eksempel 2.7. La oss løse følgende system:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 16 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 21 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 32 \end{cases}$$

Vi setter opp totalmatrisen og gausseliminerer:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & 16 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 21 \\ 2 & 6 & 4 & 6 & 32 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Den siste matrisen svarer til følgende system:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_4 = 6 \\ \qquad\quad x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$$

(Her har vi ikke tatt med noen likning for nullraden i matrisen. Det er fordi nullraden står for likningen $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$, eller med andre ord $0 = 0$. Denne likningen er åpenbart oppfylt uansett hva x_1, x_2, x_3 og x_4 er, så vi trenger ikke ta den med.)

Hvis vi flytter alt unntatt x_1 og x_3 til høyresiden, ser systemet slik ut:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - 7x_4 + 6 \\ x_3 = 2x_4 + 5 \end{cases}$$

Vi kan altså finne løsninger av systemet ved å sette x_2 og x_4 til å være hva vi vil, og deretter bruke disse to likhetene til å bestemme x_1 og x_3.

Hvis vi for eksempel velger $x_2 = 0$ og $x_4 = 1$, så får vi følgende løsning:

$$\begin{cases} x_1 = -3 \cdot 0 - 7 \cdot 1 + 6 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \cdot 1 + 5 = 7 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

For å beskrive alle løsningene av systemet på en ryddig måte, kan vi sette $x_2 = s$ og $x_4 = t$, der s og t står for to vilkårlige tall. Da er alle løsningene gitt ved:

$$\begin{cases} x_1 = -3s - 7t + 6 \\ x_2 = s \\ x_3 = 2t + 5 \\ x_4 = t \end{cases}$$

△

Variabler som vi kan sette til hva vi vil, slik som x_2 og x_4 i eksempelet over, kalles *frie variabler.*

Når vi løser et lineært likningssystem, og har funnet ut at det har minst én løsning, så er det to muligheter. Den ene muligheten er at vi ikke får noen frie variabler (slik som i eksempel 2.3). Da har systemet entydig løsning. Den andre muligheten er at det er en eller flere frie variabler (slik som i eksempel 2.7). Da har systemet uendelig mange løsninger, siden hver av de frie variablene kan settes til å være et hvilket som helst tall.

Dette betyr at det ikke er mulig at vi får for eksempel to løsninger, eller tre løsninger, og så videre. Om det først er mer enn én løsning, må det være uendelig mange.

La oss oppsummere det vi har funnet ut om eksistens og entydighet av løsninger. For ethvert lineært likningssystem må én av følgende være sant:

- Systemet har ingen løsning.
- Systemet har entydig løsning.
- Systemet har uendelig mange løsninger.

Valgfrihet

Når vi gausseliminerer har vi en viss grad av valgfrihet. Det som står fast er hva vi har lov til å gjøre, nemlig de tre typene radoperasjoner, og hva vi vil ende opp med, nemlig (redusert) trappeform. Nøyaktig hvordan vi bruker radoperasjoner for å komme frem kan vi velge selv.

Vi tar et enkelt eksempel for å illustrere dette.

Eksempel 2.8. Anta at vi vil gausseliminere denne totalmatrisen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 8 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 9 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

Her er vi nødt til å bytte øverste rad med en av de to andre for å få pivotelementet i første rad på riktig sted. Men vi velger selv hvilken av de to radene vi vil flytte til toppen. △

Vi har også noe frihet når det gjelder valg av frie variabler.

Eksempel 2.9. I eksempel 2.7 endte vi opp med at de to variablene x_2 og x_4 var frie. Men vi kunne også ha valgt å la x_1 og x_3 være frie, som vi skal se nå.

Vi hadde forenklet systemet til følgende:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - 7x_4 + 6 \\ x_3 = 2x_4 + 5 \end{cases}$$

Vi kan løse den andre likningen her for x_4 og få:

$$x_4 = \frac{x_3 - 5}{2}$$

Deretter kan vi sette inn dette i den første likningen og løse for x_2:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-x_1 - 7x_4 + 6}{3} \\ &= \frac{-x_1 - \frac{7}{2}(x_3 - 5) + 6}{3} \\ &= -\frac{1}{3}x_1 - \frac{7}{6}x_3 + \frac{47}{6} \end{aligned}$$

Hvis vi nå lar $x_1 = s$ og $x_3 = t$, så har vi følgende generelle løsning:

$$\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = -\frac{1}{3}s - \frac{7}{6}t + \frac{47}{6} \\ x_3 = t \\ x_4 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Dette ser annerledes ut enn det vi fikk i eksempel 2.7, men det beskriver nøyaktig de samme løsningene. (Du kan for eksempel sjekke at hvis vi her setter $s = -1$ og $t = 7$, så får vi den samme løsningen som da vi valgte $x_2 = 0$ og $x_4 = 1$ i eksempel 2.7). △

Oppgaver

1. Hvilke av disse matrisene er på trappeform? Hvilke av dem er på redusert trappeform?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Løs likningssystemene.

a) $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = -38 \\ 4x - 3y + 8z = -26 \\ -2x + 4y - 2z = 17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y + 6z = 4 \\ 2x + 8y + 16z = 8 \\ 2x + 6y + 12z = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ 3x + 4y - z = 1 \end{cases}$

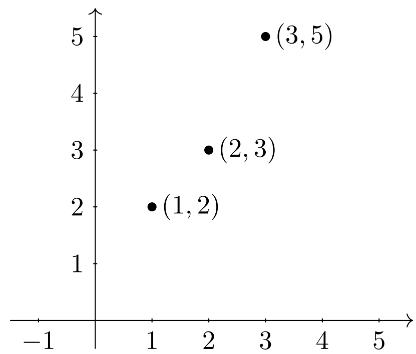
3. Er følgende to likningssystemer ekvivalente? Begrunn svaret ditt.

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

4. Er følgende to matriser radekvivalente? Begrunn svaret ditt.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

5. La $(1,2)$, $(2,3)$ og $(3,5)$ være tre punkter i planet. Vi skal finne et andregradspolynom $ax^2 + bx + c$ slik at grafen går gjennom de tre punktene.



a) Sett opp et lineært likningssystem for a, b og c.

b) Løs systemet, og finn andregradspolynomet som går gjennom alle punktene.

c) Sjekk at svaret ditt i **b)** er riktig.

6. Anta at vi har et likningssystem med m likninger og n ukjente. Hvilke av de ni forskjellige tilfellene i følgende tabell er mulige?

	$m < n$	$m = n$	$m > n$
ingen løsninger			
én løsning			
uendelig mange løsninger			

7. Se på likningssystemet

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

der a, b, c, d, m og n er konstanter, og vi antar at $ad \neq bc$.

Hvor mange løsninger har systemet? Finn løsningen(e) uttrykt ved a, b, c, d, m og n.

Hint: Start med å (i) multiplisere første rad med d og andre rad med b, eller (ii) multiplisere første rad med c og andre rad med a. Ta hensyn til at noen variabler kan være null.

8. Vis at følgende påstander er sanne for alle matriser M, N og L:

a) $M \sim M$.

b) Hvis $M \sim N$, så: $N \sim M$.

c) Hvis $M \sim L$ og $L \sim N$, så: $M \sim N$.

3 Vektor- og matriselikninger

I denne uken skal vi bruke enkel vektorregning til å analysere lineære ligningssystemer. Vi skal ha et spesielt fokus på $\mathbb{R}^3$, for det går an å visualisere; klarer man det, går det lettere å abstrahere til $\mathbb{R}^n$. Senere i kurset skal vi se hvordan noen av konseptene under kan generaliseres, slik at vi kan konstruere teori som kan behandle matematiske emner som tilsynelatende ser veldig forskjellige ut, men følger akkurat de samme lovene.

Vektorregning

Inntil videre skal vi skrive vektorer på høykant

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

kalt søylevektor. Du kan også tenke på dette som et punkt i $\mathbb{R}^n$. De to viktigste regnereglene for vektorer er skalarmultiplikasjon

$$a\mathbf{x} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix}$$

og vektoraddisjon

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

En sammensetning av disse to operasjonene

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = a\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \\ \vdots \\ ax_n + by_n \end{bmatrix}$$

kalles en *lineærkombinasjon*. Skalarene a og b kalles vekter. Hvis vi har m vektorer $\mathbf{x}_k$, definerer vi *det lineære spennet*, eller

$$\mathrm{Sp}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m\}$$

som alle lineærkombinasjoner av vektorene, altså alle vektorer på formen

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_m\mathbf{x}_m.$$

Eksempel 3.1.

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 16 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

△

Eksempel 3.2. Spennet til vektorene i eksemplet over, er alle vektorer på formen

$$a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

△

Vektorligninger

Ved å ta i bruk lineærkombinasjon, kan vi skrive ligningssystemet fra forrige uke

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ x + 5y + 9z = 33 \\ 2x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

som vektorligningen

$$x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 33 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dette gir oss en ny måte å se ligningssystemer på: oppgaven er å finne vektene x, y og z slik at søylene i matrisen lineærkombineres til å bli lik høyresiden.

Eksempel 3.3. Løsningen til systemet over er

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

og du kan verifisere at

$$7\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 33 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

△

Matriseligninger

Produktet av en $n \times n$-matrise og en søylevektor i $\mathbb{R}^n$ defineres som følgende lineærkombinasjon av matrisens søyler

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Eksempel 3.4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

△

Nå kan vi skrive ligningssystemet fra forrige uke som

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 33 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dersom vi skriver

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 33 \\ 0 \end{bmatrix},$$

kan vi innføre den kompakte notasjonen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Eksistens og entydighet av løsninger II

Ligningssystemer deler seg naturlig i tre kategorier; de som har en unik løsning, de som har ingen løsning, og de som har uendelig mange løsninger. Vi skal nå gi en geometrisk illustrasjon av hva som skjer i de forskjellige tilfellene.

Eksempel 3.5. Hvis vi utfører Gauss-eliminasjon på systemet

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix},$$

får vi

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

De to nederste linjene sier at x_2+2x_3 skal være både 2 og 5. Dette er åpenbart umulig, og systemet har ingen løsning. Grunnen er at søylene ligger i samme i plan i $\mathbb{R}^3$, og siden høyresiden ikke ligger i dette planet, er det umulig å skrive den som en lineærkombinasjon av disse vektorene. △

Eksempel 3.6. Hvis vi derimot utfører Gauss-eliminasjon på systemet

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix},$$

får vi

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

Nå er to nederste linjene identiske. Søylene i matrisen ligger som kjent i samme plan i $\mathbb{R}^3$, men nå ligger tilfeldigvis høyresiden også i dette planet, og systemet kan derfor løses. Hvis du ønsker å skrive en vektor i et plan som en lineærkombinasjon av tre andre vektorer i samme plan, har du uendelig mange måter å gjøre det på, og derfor har ligningssystemet uendelig mange løsninger. △

Eksempel 3.7. Ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 33 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

har som kjent en unik løsning. Vi sier at søylene *spenner ut* $\mathbb{R}^3$, siden alle punkter i $\mathbb{R}^3$ kan skrives som en unik lineærkombinasjon av dem. Merk at søylene i matrisen danner et parallellepiped med volum 2. △

Du kan avgjøre hvorvidt tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ ligger i samme plan ved å beregne volumet til parallellepipedet spent ut av de tre vektorene. Dersom volumet blir 0, ligger de i samme plan. Dersom søylene i matrisen A kalles $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$, kalles dette volumet *determinanten* til A, og er gitt ved

$$\det A = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3.$$

Eksempel 3.8.

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = 0.$$

△

Presise kriterier for når et ligningssystem har én, ingen, eller mange løsninger, får vi ikke uten litt mer matematisk maskineri. Men et mentalt bilde av 3×3-systemer kan vi lage oss.

- Hvis matrisens søyler danner et parallellepiped har systemet en unik løsning uansett høyreside.
- Hvis matrisens søyler ligger i samme plan, og høyresiden ikke ligger i dette planet, har systemet ingen løsning.
- Hvis matrisens søyler ligger i samme plan, og høyresiden ligger i dette planet, har systemet uendelig mange løsninger.

En forsmak på lineær uavhengighet

Hvis man har en samling vektorer, sier vi at de er lineært avhengige dersom en av vektorene i samlingen kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre, for eksempel dersom tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ ligger i samme plan.

Eksempel 3.9. Hvis du utfører gausseliminasjon på systemet

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

får du

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

altså at

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ \qquad\quad y + 2z = 0 \end{cases}.$$

setter vi $z = s$, får vi $y = -2s$ av den siste ligningen, og $x = s$ av den første, slik at

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er en løsning av systemet for vilkårlige s. Dette betyr at søylene i den opprinnelige matrisen er lineært avhengige. Vi dobbeltsjekker:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

△

Oppgaver

1. La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ være to vektorer i $\mathbb{R}^2$.

a) Regn ut $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ og $\frac{1}{2}\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

b) Tegn en figur som viser vektorene $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ og $\frac{1}{2}\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ i planet.

2. Skriv alle ligningssystemene fra oppgave **2.2** i øving 1 som

a) ... vektorlikninger.

b) ... matriselikninger.

3. Løs ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for

a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 \\ -8 & -7 & 3 \\ -4 & 5 & -8 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Finn ut om en vektor er en lineærkombinasjon av de andre:

a)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

5. Finn en vektor som ikke er en lineærkombinasjon av:

a)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ -7 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

6. Er $\begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ en lineærkombinasjon av vektorene i

a) ... oppgave **5. a)**?

b) ... oppgave **5. b)**?

c) ... oppgave **5. c)**?

7. Finn en tredje vektor i samme plan som disse to vektorene:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

8. La $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være disse vektorene i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Finn en vektor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

slik at $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ spenner ut $\mathbb{R}^3$, og løs likningen $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = 0$.

9. La p og q være følgende polynomer:

$$p(x) = x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = 4x^2 + 18x + 4$$

a) La s være polynomet $s(x) = x^2 + 8x + 2$. Finnes det konstanter a og b slik at

$$s(x) = a \cdot p(x) + b \cdot q(x)$$

for alle x?

b) Finn et andregradspolynom t som oppfyller følgende: For hvert andregradspolynom r skal det være mulig å finne konstanter a, b og c slik at

$$r(x) = a \cdot p(x) + b \cdot q(x) + c \cdot t(x)$$

10. La $m < n$. Kan m vektorer spenne ut $\mathbb{R}^n$?

4 Matriser

Nå har vi fått erfaring med å bruke matriser i et par forskjellige sammenhenger. Vi har lært å løse et lineært likningssystem ved å sette opp totalmatrisen til systemet og gausseliminere den (ved hjelp av radoperasjoner på matrisen), og vi har sett at et lineært likningssystem kan skrives på formen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

der vi har samlet alle koeffisientene i matrisen A. For å få denne likningen til å gi mening, definerte vi hvordan vi kan gange en $m \times n$-matrise med en vektor i $\mathbb{R}^n$ og få ut en vektor i $\mathbb{R}^m$.

I tillegg til dette matrise–vektor-produktet finnes det en hel rekke andre aritmetiske operasjoner vi kan utføre på matriser. I dette kapitlet tar vi en grundig gjennomgang av disse operasjonene.

Definisjoner og notasjon

En *$m \times n$-matrise* er en rektangulær tabell med tall som har m tall i høyden og n tall i bredden:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Kolonnene i matrisen er følgende kolonnevektorer:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Radene i matrisen er følgende radvektorer:

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{gathered}$$

Eksempel 4.1. Her er et eksempel på en 2×3-matrise:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Kolonnene i denne matrisen er:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Radene er:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \triangle$$

Noen ganger har vi en liste med kolonnevektorer, si

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_n,$$

og vil lage en matrise som har disse vektorene som kolonner. Den matrisen kan vi skrive slik:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

Hvis vektorene ligger i $\mathbb{R}^m$, blir dette en $m \times n$-matrise.

Eksempel 4.2. La

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

være to vektorer i $\mathbb{R}^3$. Matrisen $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$ med disse vektorene som kolonner blir da følgende 3×2-matrise:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \triangle$$

På samme måte kan vi, hvis vi har en liste med radvektorer

$$\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2,\ \ldots,\ \mathbf{r}_m,$$

lage en matrise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \end{bmatrix}$$

med disse vektorene som rader.

Eksempel 4.3. La

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$$

være tre radvektorer. Da har vi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \triangle$$

Noen ganger vil vi bruke tilsvarende notasjon for å bygge opp en matrise av andre matriser, eller av en kombinasjon av matriser og vektorer.

Eksempel 4.4. La A og B være matriser, og $\mathbf{v}$ en vektor, slik som dette:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 10 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Da kan vi skrive $\begin{bmatrix} A & B & \mathbf{v} \end{bmatrix}$ for matrisen som inneholder alle tallene fra disse tre satt ved siden av hverandre:

$$\begin{bmatrix} A & B & \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 9 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 4 & 8 \\ 7 & 1 & 10 & 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \qquad \triangle$$

En $n \times n$-matrise, altså en matrise med like mange rader og kolonner, kaller vi for en *kvadratisk* matrise. For eksempel er matrisen B i eksempel 4.4 en kvadratisk matrise, mens A ikke er det.

Produkt av matrise og vektor

La

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

være en $m \times n$-matrise med vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ som kolonner, og la

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

være en vektor i $\mathbb{R}^n$. Vi definerer produktet $A\mathbf{v}$ av A og $\mathbf{v}$ som lineærkombinasjonen av kolonnene i A med tallene i $\mathbf{v}$ som vekter:

$$A\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 v_1 + \mathbf{a}_2 v_2 + \cdots + \mathbf{a}_n v_n$$

Merk at produktet $A\mathbf{v}$ bare er definert når bredden av matrisen A er lik høyden av vektoren $\mathbf{v}$.

Eksempel 4.5. Vi regner ut produktet av en 2×3-matrise og en vektor i $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot 2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (-1) + \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot 3 \\ &= \begin{bmatrix} 5 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 17 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Merk at resultatet blir en vektor i $\mathbb{R}^2$. △

Når vi skal regne ut et produkt $A\mathbf{v}$ av en matrise og en vektor, trenger vi ikke egentlig å skrive opp lineærkombinasjonen av kolonnene i A med vekter fra $\mathbf{v}$ slik som vi gjorde i eksempelet over. Den andre linjen av utregningen i eksempelet viser en mer direkte måte å komme frem på: Tallet som skal være på første posisjon i resultatvektoren får vi ved å gange tallene fra første rad i A med tallene i $\mathbf{v}$, og legge sammen resultatene. Tallet på andre posisjon i resultatvektoren får vi på samme måte fra andre rad i A.

Generelt har vi at dersom

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

så kan vi regne ut produktet $A\mathbf{v}$ på følgende måte:

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{bmatrix}$$

(Det er ikke vanskelig å se at dette følger fra definisjonen av $A\mathbf{v}$.)

Teorem 4.6. *Hvis A er en $m \times n$-matrise, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er vektorer i $\mathbb{R}^n$ og c er et tall, så har vi følgende likheter:*

$$A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = A\mathbf{v} + A\mathbf{w} \qquad \textit{og} \qquad A(c\mathbf{v}) = c(A\mathbf{v})$$

Eksempel 4.7. La A og $\mathbf{v}$ være følgende matrise og vektor:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

I eksempel 4.5 regnet vi ut produktet $A\mathbf{v}$. Men hva om vi har lyst til å gange A med vektoren $(8, -4, 12)$? Siden denne vektoren er lik $4 \cdot \mathbf{v}$ kan vi bruke teorem 4.6 og få:

$$A \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix} = A \cdot (4 \cdot \mathbf{v}) = 4 \cdot (A \cdot \mathbf{v}) = 4 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 68 \end{bmatrix}$$

Altså: A ganget med vektoren $4\mathbf{v}$ er det samme som 4 ganger vektoren $A\mathbf{v}$. △

Det er verdt å merke seg hva som skjer hvis vi ganger en matrise med en vektor der nøyaktig ett av tallene er 1, og resten er 0. La oss teste dette med en eksempelmatrise:

Eksempel 4.8. Vi ganger 2×3-matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

med de tre vektorene

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og får følgende:

$$\begin{aligned} A\mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \\ A\mathbf{e}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ A\mathbf{e}_3 &= \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resultatene ble altså de tre kolonnene i A. △

Generelt har vi at hvis A er en $m \times n$-matrise, og $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ er vektorene i $\mathbb{R}^n$ som er slik at $\mathbf{e}_i$ har et 1-tall i sin i-te koordinat og bare 0-er ellers, så er

$$A\mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{e}_2, \quad \ldots, \quad A\mathbf{e}_n$$

nøyaktig samme vektorer som kolonnene i A.

Sum og skalering av matriser

La A og B være to $m \times n$-matriser:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Vi definerer summen $A + B$ på den mest åpenbare måten – vi legger sammen tallene fra de to matrisene i hver posisjon, og får en ny $m \times n$-matrise:

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Produktet av et tall og en matrise defineres også på den åpenbare måten – vi ganger med tallet på hver plass i matrisen:

$$cA = \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} & \cdots & c \cdot a_{1n} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} & \cdots & c \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c \cdot a_{m1} & c \cdot a_{m2} & \cdots & c \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

Teorem 4.9. *Hvis A og B er $m \times n$-matriser, $\mathbf{v}$ er en vektor i $\mathbb{R}^n$ og c er et tall, så har vi følgende likheter:*

$$(A+B)\mathbf{v} = A\mathbf{v} + B\mathbf{v} \qquad \textit{og} \qquad (cA)\mathbf{v} = c(A\mathbf{v})$$

Vektorer som matriser

Hittil har vi snakket om vektorer og matriser som to forskjellige slags ting, men vi kan også velge å se på vektorer som et spesialtilfelle av matriser der enten høyden eller bredden er 1.

En kolonnevektor

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

kan vi tenke på som en $m \times 1$-matrise, og en radvektor

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix}$$

kan vi tenke på som en $1 \times n$-matrise.

Eksempel 4.10. La $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være henholdsvis en kolonnevektor og en radvektor:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Vektoren $\mathbf{v}$ kan vi også se på som en 3×1-matrise, og vektoren $\mathbf{w}$ kan vi se på som en 1×3-matrise.

Hvis vi velger å tenke på $\mathbf{w}$ som en matrise og $\mathbf{v}$ som en vektor, så kan vi gange dem sammen med den vanlige regelen for produkt av matrise og vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resultatet blir vektoren $\begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^1$. En vektor i $\mathbb{R}^1$ består av kun ett tall, og vi vil vanligvis si at en slik vektor er det samme som det ene tallet. Med andre ord kan vi sløyfe klammene og ganske enkelt skrive:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 8. \qquad \triangle$$

Generelt har vi at produktet av en radvektor og en kolonnevektor er gitt ved følgende uttrykk:

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = w_1 v_1 + w_2 v_2 + \cdots + w_n v_n$$

(Merk at det må være like mange tall i radvektoren som i kolonnevektoren for at vi skal kunne gange dem sammen.)

Matrisemultiplikasjon

Nå kommer vi til den mest spennende av de aritmetiske operasjonene vi kan gjøre med matriser, nemlig *matrisemultiplikasjon*.

Det er litt mer komplisert å beskrive hvordan vi multipliserer matriser enn hvordan vi summerer dem. Det er imidlertid en god grunn til at det er slik. Vi kunne valgt å definere multiplikasjon av matriser på tilsvarende måte som sum, men det ville ikke blitt spesielt nyttig. Vi vil nemlig at matrisemultiplikasjon skal oppføre seg pent sammen med multiplikasjon av matriser med vektorer. Spesielt vil vi at følgende likhet skal holde:

$$(AB)\mathbf{v} = A(B\mathbf{v})$$

Vi vil altså at vi fritt skal kunne flytte parentesene, akkurat slik vi kan gjøre med et produkt av tre tall.

Hvordan kan vi definere produkt av matriser slik at dette fungerer? La oss først se på et eksempel.

Eksempel 4.11. La A og B være følgende to 2×2-matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi har lyst til å finne matrisen AB som skal være slik at $(AB)\mathbf{v} = A(B(\mathbf{v}))$ for alle vektorer $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$.

Nå er det lurt å se på de to spesielle vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi vet fra tidligere at hvis vi ganger en 2×2-matrise med en av disse vektorene, så får vi ut den første eller den andre kolonnen i matrisen.

Vi regner ut:

$$\begin{aligned} B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \\ A\left(B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 22 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Det vi er ute etter er at AB skal være slik at

$$(AB)\mathbf{v} = A(B\mathbf{v})$$

for alle vektorer $\mathbf{v}$. Spesielt må vi da ha:

$$(AB) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A\left(B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Men det å gange med vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

er det samme som å plukke ut første kolonne av matrisen, så vi har nå funnet ut at første kolonne i matrisen AB må være:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 22 \end{bmatrix}$$

På samme måte finner vi andre kolonne i AB:

$$B\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$
$$A\left(B\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3 & -5\\2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\13\end{bmatrix}$$
$$(AB)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = A\left(B\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\13\end{bmatrix}$$

Dette betyr at andre kolonne i AB må være:

$$\begin{bmatrix}4\\13\end{bmatrix}$$

Dermed kommer vi frem til at produktet av A og B er:

$$AB = \begin{bmatrix}2 & 4\\22 & 13\end{bmatrix} \qquad \triangle$$

La oss nå generalisere det vi gjorde i eksempelet. Foreløpig ser vi på generelle 2×2-matriser, og så tar vi det helt generelle tilfellet, med matriser av vilkårlig størrelse, etterpå.

La A og B være to 2×2-matriser, og la

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

være de to spesielle vektorene vi brukte i eksempelet over. La $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ være kolonnene i B, slik at vi har:

$$B = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2\end{bmatrix}$$

På samme måte som i eksempelet får vi nå:

$$(AB)\mathbf{e}_1 = A(B\mathbf{e}_1) = A\mathbf{b}_1$$
$$(AB)\mathbf{e}_2 = A(B\mathbf{e}_2) = A\mathbf{b}_2$$

Dette betyr at første kolonne i matrisen AB må være $A\mathbf{b}_1$, og andre kolonne må være $A\mathbf{b}_2$. Vi får altså:

$$AB = \begin{bmatrix}A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2\end{bmatrix}$$

Hvis vi lar $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ være radene i A, så gir dette oss at:

$$AB = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2\\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\end{bmatrix}$$

For å virkelig gjøre dette detaljert, kan vi skrive opp nøyaktig hvordan vi finner hvert tall i AB ut fra hvert enkelt av tallene i A og B. Hvis

$$A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{bmatrix},$$

så får vi:

$$AB = \begin{bmatrix}a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{21}b_{22}\end{bmatrix}$$

Merk hvordan dette siste uttrykket er bygd opp. Når vi skal finne tallet som skal stå på en bestemt posisjon i AB, går vi bortover den tilsvarende *raden* i A og samtidig nedover den tilsvarende *kolonnen* i B. Vi ganger sammen tallene vi finner i A med de vi finner i B, og legger sammen disse produktene.

Alt det vi gjorde nå fungerer helt tilsvarende når vi går til større matriser enn 2×2. Men for at det skal gå an å gange sammen to matriser A og B, må de være «kompatible» i størrelse. Vi finner produktet AB ved å kombinere rader fra A med kolonner fra B, og for at dette skal gå an, må lengden av radene i A være lik lengden av kolonnene i B. Det vil si at bredden til A må være lik høyden til B.

Basert på det vi har gjort nå lager vi en generell definisjon av matrisemultiplikasjon.

Definisjon. La A være en $m \times n$-matrise med rader $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, og la B være en $n \times p$-matrise med kolonner $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_p$:

$$A = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\vdots\\\mathbf{a}_m\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_p\end{bmatrix}$$

Da er produktet av A og B en $m \times p$-matrise definert ved:

$$AB = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_p\\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_p\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{a}_m\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_m\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m\mathbf{b}_p\end{bmatrix} \qquad \triangle$$

Hvis vi lar A og B være som i definisjonen, kan vi også skrive produktet slik:

$$AB = \begin{bmatrix}A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_p\end{bmatrix}$$

Eksempel 4.12. La A og B og C være følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix}5 & 0 & -2\\3 & 1 & 4\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\\2 & 4\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$$

Siden A er en 2×3-matrise og B er en 3×2-matrise, er AB en 2×2-matrise. Vi regner ut denne matrisen ved å bruke definisjonen:

$$\begin{aligned}AB &= \begin{bmatrix}5\cdot 2 + 0\cdot 1 + (-2)\cdot 2 & 5\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-2)\cdot 4\\ 3\cdot 2 + 1\cdot 1 + 4\cdot 2 & 3\cdot 1 + 1\cdot 0 + 4\cdot 4\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}6 & -3\\15 & 19\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Hvis vi ganger sammen de samme to matrisene i motsatt rekkefølge, får vi en 3×3-matrise:

$$\begin{aligned}BA &= \begin{bmatrix}2\cdot 5 + 1\cdot 3 & 2\cdot 0 + 1\cdot 1 & 2\cdot(-2) + 1\cdot 4\\ 1\cdot 5 + 0\cdot 3 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot(-2) + 0\cdot 4\\ 2\cdot 5 + 4\cdot 3 & 2\cdot 0 + 4\cdot 1 & 2\cdot(-2) + 4\cdot 4\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}13 & 1 & 0\\5 & 0 & -2\\22 & 4 & 12\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Produktet av matrisene B og C blir en 3×2-matrise:

$$BC = \begin{bmatrix}5 & 8\\1 & 2\\14 & 20\end{bmatrix}$$

Men produktet CB er ikke definert, siden C er en 2×2-matrise og B en 3×2-matrise.

Vi kunne også regnet ut for eksempel CA, men AC er ikke definert. $\triangle$

Vi kan nå legge merke til at matrisemultiplikasjon – i motsetning til multiplikasjon av vanlige tall – ikke er kommutativt. Det vil si at faktorenes rekkefølge spiller en rolle: AB er ikke nødvendigvis det samme som BA.

Vi må altså passe på at vi ikke av gammel vane bytter om faktorene når vi jobber med et produkt av matriser. Men mange andre regneregler fungerer like bra med matriser som med tall. Vi tar et teorem med noen regneregler for matrisemultiplikasjon.

Teorem 4.13. *La A, B og C være matriser, $\mathbf{v}$ en vektor, og c et tall. I hver del av teoremet antar vi at størrelsene på matrisene og vektoren er slik at alle operasjonene som brukes er definert.*

(a) *Matrisemultiplikasjon er en assosiativ operasjon:*

$$A(BC) = (AB)C$$

Et spesialtilfelle av dette er følgende:

$$(AB)\mathbf{v} = A(B\mathbf{v})$$

(b) *Å skalere et matriseprodukt er det samme som å skalere én av faktorene og deretter multiplisere:*

$$(cA)B = c(AB) = A(cB)$$

(c) *Matrisemultiplikasjon distribuerer over addisjon av matriser:*

$$A(B+C) = AB+AC \quad \text{og} \quad (A+B)C = AC+BC$$

Transponering

Vi har hittil snakket om aritmetiske operasjoner på matriser som tilsvarer operasjoner vi kan gjøre med tall: addisjon og multiplikasjon. Operasjonen *transponering*, derimot, er helt spesiell for matriser, og går ut på at vi bytter om rader og kolonner.

Definisjon. La

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

være en $m \times n$-matrise. Den *transponerte* av A er $n \times m$-matrisen

$$A^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

der radene og kolonnene i A er byttet om. △

Eksempel 4.14. Hvis vi lar A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

så er den transponerte av A gitt ved:

$$A^\top = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Hvis vi transponerer denne matrisen igjen, så kommer vi tilbake til utgangspunktet:

$$(A^\top)^\top = A$$

△

Vi tar med noen regneregler for transponering.

Teorem 4.15. *For enhver matrise A har vi at å transponere to ganger gir den opprinnelige matrisen:*

$$(A^\top)^\top = A$$

Hvis A og B er matriser sik at produktet AB er definert, så er den transponerte av produktet lik produktet av de transponerte, i motsatt rekkefølge:

$$(AB)^\top = B^\top \cdot A^\top$$

Identitetsmatriser

Når vi ser på multiplikasjon av tall, så er det ett bestemt tall som oppfører seg helt spesielt, nemlig tallet 1. Tallet 1 oppfører seg som et *identitetselement* med hensyn på multiplikasjon. Det betyr at å gange med 1 ikke endrer noe. Hvis vi starter med et hvilket som helst tall, og ganger det med 1, så får vi bare det samme tallet som resultat:

$$a \cdot 1 = a$$

Finnes det noe tilsvarende som dette i verdenen av matriser og matrisemultiplikasjon? Med andre ord: Finnes det en matrise I slik at

$$A \cdot I = A$$

for alle matriser A?

Det er ganske tydelig at det ikke gir mening å stille akkurat det spørsmålet, for det går ikke an å finne én matrise I som er slik at produktet AI er definert for alle matriser A av alle mulige størrelser.

Så vi må begrense oss til å se på matriser av én størrelse om gangen. Dessuten må vi huske på at matriseproduktet ikke er kommutativt, så AI og IA er ikke nødvendigvis det samme. For å si at I er et identitetselement vil vi at både AI og IA skal bli lik A.

Det viser seg at å finne identitetselementer bare er mulig hvis vi dessuten begrenser oss til kvadratiske matriser. Da kan vi reformulere spørsmålet vårt slik:

Finnes det en $n \times n$-matrise I_n som er slik at

$$A \cdot I_n = A = I_n \cdot A$$

for alle $n \times n$-matriser A?

Det er ikke vanskelig å se at denne matrisen oppfyller egenskapene vi er ute etter:

$$I_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{n \times n\text{-matrise}}$$

Matrisen I_n er en $n \times n$-matrise der det er 1-tall langs diagonalen mellom øverste venstre hjørne og nederste høyre hjørne, og bare 0 ellers. Den kalles *identitetsmatrisen* av størrelse n.

Eksempel 4.16. Identitetsmatrisen av størrelse 2 er:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi sjekker enkelt at vi kan gange en hvilken som helst 2×2-matrise med I_2, til venstre eller høyre, uten at noe endres:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 & a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 & a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} \\ 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} & 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vi ser altså at identitetsmatrisen I_2 oppfører seg som et identitetselement med hensyn på multiplikasjon av 2×2-matriser. △

Vi ser også at det å gange en identitetsmatrise med en vektor ikke endrer vektoren. Altså: Hvis $\mathbf{v}$ er en vektor i $\mathbb{R}^n$, så er

$$I_n \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Mer generelt har vi at om vi ganger en identitetsmatrise med en hvilken som helst matrise som den kan ganges med, så får vi den matrisen som resultat. Altså: Hvis A er en $m \times n$-matrise, så har vi:

$$I_m \cdot A = A = A \cdot I_n$$

Potenser av matriser

Hvis A er en kvadratisk matrise, så kan vi gange A med seg selv. Vi definerer potenser av A på tilsvarende måte som potenser av tall:

$$\begin{aligned}
A^2 &= A \cdot A, \\
A^3 &= A \cdot A \cdot A,
\end{aligned}$$

og så videre. Generelt definerer vi at A opphøyd i n-te er produktet av A med seg selv n ganger:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{n \text{ ganger}}$$

Et spesielt tilfelle er å opphøye i 0-te. For tall har vi definert at $a^0 = 1$. Men vi vet jo at for matriser spiller identitetsmatrisen den samme rollen som 1 gjør for tall. Derfor definerer vi at en $n \times n$-matrise opphøyd i 0-te blir identitetsmatrisen av størrelse n:

$$A^0 = I_n$$

Inverser

For multiplikasjon av tall har vi identitetselementet 1, og vi har dessuten *inverser*. Gitt et tall a finnes et tall b, inversen til a, som er slik at

$$a \cdot b = 1.$$

Inversen til a er selvfølgelig bare tallet $1/a$. For eksempel: Inversen til tallet 5 er $1/5$, og inversen til $3/4$ er $4/3$.

Kan vi på tilsvarende måte finne inverser til matriser? Igjen begrenser vi oss til å se på kvadratiske matriser, og spørsmålet blir: Gitt en $n \times n$-matrise A, finnes det en matrise B som er slik at likhetene

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A$$

er oppfylt?

Vi tar et eksempel for å se hvordan noen slike matriser kan se ut.

Eksempel 4.17. La A og B være følgende 2×2-matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix}$$

Da kan vi regne ut at

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

og

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Disse matrisene oppfyller altså likhetene

$$A \cdot B = I_2 = B \cdot A.$$

△

Vi definerer begrepet «invers» ved å bruke disse likhetene.

Definisjon. La A være en $n \times n$-matrise. En *invers* til A er en $n \times n$-matrise B som er slik at

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A.$$

En matrise er *inverterbar* hvis den har en invers. △

Denne definisjonen gir opphav til noen åpenbare spørsmål:

- Finnes det kvadratiske matriser som ikke har noen invers? (Vi har gitt et eget navn, «inverterbar», til matriser som har invers. Dette hinter ganske sterkt om at det bør finnes matriser som ikke har invers også.)
- Kan en matrise ha mer enn én invers?

Vi kan ganske enkelt besvare det første spørsmålet ved å se på et eksempel.

Eksempel 4.18. Er matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

inverterbar?

La oss skje hva som skjer hvis vi antar at det finnes en matrise

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

som er en invers til A. Da må vi ha at $AB = I_2$, altså:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Men produktet på venstre side her er:

$$\begin{bmatrix} b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dermed får vi (ved å se på tallene nederst til høyre i matrisene som skal være like) at $0 = 1$, noe som ikke er mulig. Det kan altså ikke finnes noen slik B som er en invers til A, så A er ikke inverterbar. △

La oss nå ta for oss spørsmålet om hvorvidt samme matrise kan ha flere inverser. Svaret er at det kan den ikke, og det kan vi vise ganske enkelt ut fra definisjonen av invers.

Teorem 4.19. *Hvis en matrise er inverterbar, så har den nøyaktig én invers.*

Bevis. La A være en inverterbar $n \times n$-matrise. Anta at B er en invers til A, og at C også er en invers til A; det vil si at

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A \qquad \text{og} \qquad A \cdot C = I_n = C \cdot A.$$

Vi vil vise at B og C ikke kan være forskjellige, altså at vi nå må ha $B = C$.

La oss ta utgangspunkt i produktet BAC. Dette kan vi skrive som enten $(BA) \cdot C$ eller $B \cdot (AC)$, og i hvert tilfelle får vi (ved å bruke likhetene over) at uttrykket i parentes blir identitetsmatrisen. Vi setter dette sammen og får:

$$C = I_n \cdot C = (BA) \cdot C = B \cdot (AC) = B \cdot I_n = B$$

Vi har altså kommet frem til at $B = C$, så inversen er entydig. □

Nå som vi vet at en matrise A ikke kan ha mer enn én invers, kan vi slutte å snakke om «en invers til A» i ubestemt form. Isteden sier vi «inversen til A» i bestemt form. Vi definerer dessuten en notasjon for inversen. Hvis A er en inverterbar matrise, så skriver vi A^{-1} for inversen til A.

Eksempel 4.20. I eksempel 4.17 er matrisen B en invers til A; vi har altså at $A^{-1} = B$. Vi får dessuten at A er en invers til B, slik at $B^{-1} = A$. △

Hvorfor er inverser interessante? Én grunn er at de kan fortelle oss noe om løsninger av likninger.

Hvis vi skal løse en likning

$$ax = b$$

der a og b er tall, så vil vi selvfølgelig dele på a for å få x alene på venstresiden. Det er det samme som å gange med inversen til a.

Når vi skal løse en matriselikning

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

så kan vi ikke dele på A. Men hvis A er inverterbar, så kan vi nesten gjøre det likevel, for da kan vi gange med inversen til A. Det gjør at vi kan konkludere med at likningen er løsbar – uansett hva høyresidevektoren $\mathbf{b}$ er – og dessuten at løsningen må være entydig. Vi skriver opp dette som et teorem.

Teorem 4.21. *La A være en $n \times n$-matrise, og $\mathbf{b}$ en vektor i $\mathbb{R}^n$. Hvis A er inverterbar, så har likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ entydig løsning, og løsningen er $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$.*

Bevis. Vi sjekker ved innsetting at $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$ er en løsning av likningen. Vi har:

$$A \cdot (A^{-1} \cdot \mathbf{b}) = (A \cdot A^{-1}) \cdot \mathbf{b} = I_n \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}$$

Det betyr at $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$ er en løsning.

Nå må vi sjekke at den er entydig. Fra likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ får vi ved å gange til venstre med A^{-1} på begge sider av likhetstegnet:

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Men siden $A^{-1}A = I_n$ kan venstresiden her forenkles til $I_n\mathbf{x}$, som bare er $\mathbf{x}$. Dermed har vi:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Det betyr at dette er den eneste løsningen av likningen, og beviset er ferdig. □

Eksempel 4.22. La oss se på følgende likning:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Fra eksempel 4.17 vet vi at matrisen på venstresiden av denne likningen er inverterbar, og at inversen er:

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix}$$

Da sier teorem 4.21 at likningen har entydig løsning, og at løsningen er:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$ △

Nå vet vi ganske mye om inverser av matriser – men ikke hvordan vi regner ut en invers. Vi kommer til dette snart, men først skal vi se på en generell teknikk for å løse flere likningssystemer samtidig. Denne teknikken skal vi deretter bruke til å utlede en metode for å regne ut inverser.

Samtidig løsning av flere systemer

Vi husker at et lineært likningssystem kan skrives som en matriselikning $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, og at vi løser det ved å gausseliminere totalmatrisen $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array}\right]$.

Anta nå at vi vil løse flere systemer

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_1 &= \mathbf{b}_1 \\ A\mathbf{x}_2 &= \mathbf{b}_2 \\ &\vdots \\ A\mathbf{x}_t &= \mathbf{b}_t \end{aligned}$$

med samme koeffisientmatrise A, men forskjellige høyresidevektorer $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_t$. Det kan vi selvsagt gjøre ved å utføre gausseliminasjon på totalmatrisene til alle systemene:

$$\begin{gathered} \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b}_1 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b}_2 \end{array}\right] \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b}_t \end{array}\right] \end{gathered}$$

Men da gjør vi egentlig den samme gausseliminasjonen mange ganger. Det eneste som blir forskjellig er hva vi får i siste kolonne. Vi kan spare oss for arbeid ved å slå sammen totalmatrisene til den ene matrisen

$$\left[\begin{array}{c|cccc} A & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_t \end{array}\right],$$

og gausseliminere den.

Eksempel 4.23. La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi vil løse disse tre systemene:

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi lager en kombinert totalmatrise for alle systemene, og gausseliminerer den:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & -2 & -2 & 10 & -4 \\ 1 & 3 & 7 & 1 & 0 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 10 & -4 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & 8 & -4 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1/2 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & -3/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1/2 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Den siste matrisen her er på redusert trappeform, og nå kan vi finne løsningene av de tre systemene ved å se på de tre høyresidene i denne matrisen:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \qquad \triangle$$

Beregning av inverser

La oss nå se på hvordan vi kan regne ut inverser. Anta at vi har en $n \times n$-matrise A. Vi vil finne ut om den er inverterbar, og i så fall vil vi finne inversmatrisen A^{-1}.

Vi ser på likningen

$$AX = I_n,$$

der X er en ukjent $n \times n$-matrise. Hvis vi lar

$$\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_n$$

være kolonnene i X, altså

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix},$$

så kan vi skrive produktet AX slik:

$$AX = \begin{bmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & \cdots & A\mathbf{x}_n \end{bmatrix}$$

La oss gi navn til kolonnene i identitetsmatrisen I_n også:

$$I_n = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \ldots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix}$$

Det vil si at $\mathbf{e}_i$ er den vektoren i $\mathbb{R}^n$ som har et 1-tall på posisjon i, og bare 0-er ellers.

Nå kan vi, ved å se på hver kolonne, skrive om likningen $AX = I_n$ til disse n likningene:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_1 &= \mathbf{e}_1 \\ A\mathbf{x}_2 &= \mathbf{e}_2 \\ &\vdots \\ A\mathbf{x}_n &= \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

Dermed kan vi bruke teknikken vi beskrev over for å løse flere likningssystemer samtidig. Da må vi gausseliminere matrisen

$$\left[\begin{array}{c|cccc} A & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{array}\right]$$

for å løse disse systemene.

La oss ta et eksempel for å se hvordan dette blir i praksis.

Eksempel 4.24. Vi vil forsøke å invertere følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi følger ideene beskrevet over, så vi finner en matrise X slik at $AX = I_3$ ved å løse følgende tre systemer:

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi setter opp den kombinerte totalmatrisen for de tre systemene og gausseliminerer:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{5} & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Vi får altså følgende løsninger:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6/5 \\ -2/5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

Nå finner vi matrisen X ved å bruke $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ og $\mathbf{x}_3$ som kolonner:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6/5 & 1 & -3/5 \\ -2/5 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Vi har funnet X ved å løse likningen $AX = I_3$, så vi vet at dette stemmer. Det kan likevel være lurt å sjekke det ved å gange sammen A og X, for å være sikre på at vi ikke har regnet feil.

Hvis du prøver å gange dem sammen motsatt vei, vil du oppdage at vi også har $XA = I_3$. Dette betyr at X er inversen til A, altså at $A^{-1} = X$. $\triangle$

I eksempelet løste vi likningen $AX = I_3$, og det viste seg at matrisen X som vi fant også oppfylte likheten $XA = I_3$, slik at vi kunne konkludere med at $A^{-1} = X$.

Dette var ikke en tilfeldighet – det er faktisk alltid nok å løse likningen $AX = I_n$ for å finne inversen til A. Vi skal bevise dette, men vi tar først et lemma (hjelperesultat) som vi skal bruke i beviset vårt.

Lemma 4.25. *La A og B være $n \times n$-matriser. Dersom*

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} I_n & B \end{array}\right],$$

så er $AB = I_n$.

Bevis. Vi viste over (i diskusjonen før eksempel 4.24) at vi kan løse likningen $AX = I_n$ ved å gausseliminere matrisen

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right].$$

Nå har vi antatt at

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} I_n & B \end{array}\right],$$

og siden den andre matrisen her er på redusert trappeform, er det den vi ender opp med når vi gausseliminerer. Det vil si at $X = B$ er løsningen av likningen $AX = I_n$, altså har vi $AB = I_n$. ☐

Nå er vi klare for å bevise at metoden vår for å finne inverser fungerer.

Teorem 4.26. *La A være en $n \times n$-matrise.*

(a) A er inverterbar hvis og bare hvis $A \sim I_n$.

(b) Hvis A er inverterbar, så kan vi finne inversen ved å gausseliminere matrisen

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$$

til redusert trappeform og lese av høyre halvdel av den resulterende matrisen. Med andre ord: Resultatet av gausseliminasjonen blir følgende matrise:

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right]$$

Bevis. Når vi gausseliminerer matrisen

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$$

til redusert trappeform, må venstre halvdel av den resulterende matrisen enten bli I_n, eller en matrise med minst én nullrad. Men i høyre halvdel kan det ikke bli noen nullrader, for enhver rad vi får etter å ha gjort radoperasjoner på I_n er på formen

$$a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2 + \cdots + a_n\mathbf{r}_n$$

der $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ er radene i I_n og minst én a_i er ulik 0. Dette betyr at hvis vi får en nullrad i venstre halvdel av trappeformmatrisen, så har likningen $AX = I_n$ ingen løsning, og dermed er A ikke inverterbar. Dermed har vi vist én halvdel av påstanden i del (a): Hvis A er inverterbar, så må vi ha $A \sim I_n$.

La oss nå anta at $A \sim I_n$. Vi vil vise at da er A inverterbar, og at metoden beskrevet i del (b) gir riktig svar. La B være matrisen vi får som svar ved å bruke denne metoden. Det vil si at følgende matriser er begynnelsen og slutten av gausseliminasjonen vi utfører:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} I_n & B \end{array}\right],$$

Nå sier lemma 4.25 at $AB = I_n$.

La oss stokke litt om på kolonnene i matrisen

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$$

og isteden se på følgende matrise:

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & A \end{array}\right]$$

Hvis vi utfører akkurat de samme radoperasjonene på denne som vi gjorde i gausseliminasjonen av den første matrisen, så får vi akkurat samme resultat, men med tilsvarende omstokking av kolonnene, altså:

$$\left[\begin{array}{c|c} B & I_n \end{array}\right]$$

Dette betyr at disse matrisene er radekvivalente:

$$\left[\begin{array}{c|c} B & I_n \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} I_n & A \end{array}\right]$$

Ved å bruke lemma 4.25 igjen, på denne siste radekvivalensen, får vi at $BA = I_n$.

Vi har altså vist at vi har

$$AB = I_n = BA,$$

som betyr at B er inversen til A. Det vil si at vi har bevist andre halvdel av del (a) (hvis $A \sim I_n$, så er A inverterbar), og vi har bevist at metoden i del (b) gir riktig svar. ☐

Det alt dette betyr i praksis er at hvis vi har en matrise A som vi har lyst til å invertere, hvis det er mulig, så setter vi opp matrisen

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$$

og gausseliminerer. Da er det to muligheter. Enten får vi en nullrad i venstre halvdel, og da er A ikke inverterbar. Eller så kommer vi frem til redusert trappeform uten noen nullrad i venstre halvdel, og da har vi matrisen

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right]$$

der inversen til A kan leses av i høyre halvdel.

Oppgaver

1. La A og B være matriser, og $\mathbf{v}$ en vektor:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Regn ut (eller forklar hvorfor uttrykkene ikke gir mening):

a) AB **d)** B^2 **g)** $BA\mathbf{v}$

b) BA **e)** $A + B$ **h)** $B^\top$

c) A^2 **f)** $(A + I_3)\mathbf{v}$ **i)** $\mathbf{v}^\top\mathbf{v}$

2. La $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være vektorer i $\mathbb{R}^2$, og A en 2×2-matrise slik at:

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Regn ut $A\mathbf{w}$, der $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

3. Løs de to likningene $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ og $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$, der A, $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ er gitt ved:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. Er følgende matriser inverterbare? I så fall, finn den inverse og sjekk at svaret ditt er riktig.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. Finn en kvadratisk matrise A slik at:

a) $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ og $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ og $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99 \\ -1 \\ 145 \end{bmatrix}$ og $A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

d) $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ og $A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

6. La A og B være to 2×2-matriser. Betrakt likningen

$$AX = B,$$

hvor X er en ukjent 2×2-matrise.

a) Forklar hvorfor likningen er ekvivalent med å løse to 2×2-likningssystemer samtidig. Hvordan generaliseres denne påstanden for $n \times n$-matriser?

b) Løs likningen for $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

7. La A, B og C være 2×2-matriser. Betrakt likningen

$$AX + XB = C,$$

hvor X er en ukjent 2×2-matrise.

a) Hvorfor kan man *ikke* løse denne likningen som to 2×2-likningssystemer samtidig?

b) Skriv om likningen til fire likninger med fire ukjente. Hva er totalmatrisen?

c) Løs likningen når A, B og C er følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8. La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kan du finne et tall c og en vektor $\mathbf{v}$ (som ikke skal være nullvektoren) slik at $A\mathbf{v} = c\mathbf{v}$? I så fall, for hvilke valg av c eksisterer en slik ikke-null vektor? Kan du gi en geometrisk forklaring på hva som skjer når du multipliserer A med vektorene i de ulike tilfellene for c?

9. La A, $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ være gitt ved:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Skisser $A\mathbf{e}_1$ og $A\mathbf{e}_2$ i planet. Hva har skjedd med $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ geometrisk når de er blitt ganget med A?

b) Hva skjer – geometrisk – med en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^2$ når vi multipliserer med A?

c) Kan du gi en geometrisk forklaring på hvorfor A burde være inverterbar? Har du et forslag til hvordan multiplikasjon med A^{-1} burde endre en vilkårlig vektor (geometrisk)?

d) Finn den inverse matrisen til A, og sammenlign med svaret ditt i del **c)**.

10.

a) La

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

være to vektorer i $\mathbb{R}^n$. Vis at prikkproduktet mellom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n,$$

er det samme som matriseproduktet $\mathbf{v}^\top \mathbf{w}$.

b) La $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ være en $n \times n$-matrise slik at $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i = 1$ for alle i, og $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0$ for $i \neq j$. Vis at $A^{-1} = A^\top$.

Hint: Hva er radene i matrisen $A^\top$?

c) Sjekk at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

oppfyller antagelsene i del **b)**, og bruk dette til å bestemme A^{-1}. Sjekk at svaret ditt er riktig.

5 Lineær uavhengighet

Definisjonen av lineær uavhengighet

Vi starter med et eksempel:

Eksempel 5.1. La **u**, **v** og **w** være følgende tre vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Disse vektorene oppfyller følgende likhet (det er lett å sjekke):

$$\mathbf{u} = -5 \cdot \mathbf{v} + 9 \cdot \mathbf{w}$$

En slik lineær likhet som knytter sammen vektorer tenker vi på som en «avhengighet» mellom vektorene, og vi sier at vektorene **u**, **v** og **w** er lineært avhengige fordi det finnes en slik sammenheng mellom dem.

Vi kan også skrive likheten vår på følgende måte ved å sette alle vektorene på samme side av likhetstegnet:

$$\mathbf{u} + 5 \cdot \mathbf{v} - 9 \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

Det vi har gjort nå er å skrive nullvektoren som en lineærkombinasjon av **u**, **v** og **w**. △

Hvis vi har en liste $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ med vektorer, så er det klart at nullvektoren **0** er en lineærkombinasjon av disse, fordi vi har likheten

$$0 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

der vi har satt alle vektene til å være 0.

Men spørsmålet vi kan stille er: Kan vi også skrive **0** som en lineærkombinasjon av vektorene våre på en annen måte, der ikke alle vektene er 0? I eksempelet over kunne vi det, men i andre tilfeller er det ikke mulig. Dette er det vi vil bruke som definerende egenskap for å si at noen gitte vektorer enten er lineært avhengige eller lineært uavhengige.

Definisjon. La $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ være vektorer i $\mathbb{R}^m$. Disse vektorene er *lineært uavhengige* dersom likningen

$$\mathbf{v}_1 \cdot x_1 + \mathbf{v}_2 \cdot x_2 + \cdots + \mathbf{v}_n \cdot x_n = \mathbf{0}$$

ikke har andre løsninger enn den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

I motsatt tilfelle kalles de *lineært avhengige.* △

Eksempel 5.2. Se på vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^3$. Likningen

$$\mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_2 x_2 = \mathbf{0}$$

medfører at $3x_1 = 0$ og $4x_2 = 0$, altså $x_1 = x_2 = 0$, så den har bare den trivielle løsningen. Dermed er $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ lineært uavhengige. △

Eksempel 5.3. Vektorene **u**, **v** og **w** i eksempel 5.1 er lineært avhengige, siden likningen

$$\mathbf{u}x_1 + \mathbf{v}x_2 + \mathbf{w}x_3 = \mathbf{0}$$

har ikketrivielle løsninger (for eksempel løsningen $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ og $x_3 = -9$). △

Lineær uavhengighet for to vektorer

Hvis vi ser på bare to vektorer, er det ikke vanskelig å sjekke om de er lineært uavhengige eller ikke.

Eksempel 5.4. Vi undersøker om følgende vektorer er lineært uavhengige:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -12 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Siden vi har $\mathbf{v}_1 = 2 \cdot \mathbf{v}_2$, får vi at nullvektoren kan skrives som en ikketriviell lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og **2** på denne måten:

$$1 \cdot \mathbf{v}_1 - 2 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

Vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er derfor lineært avhengige. △

I dette eksempelet hadde vi at den ene vektoren kunne skrives som et tall ganger den andre, og ut fra det fant vi at vektorene var lineært avhengige. Vi viser at dette generelt er nok til å bestemme om to vektorer er lineært uavhengige eller ikke.

Teorem 5.5. *To vektorer* **u** *og* **v** *er lineært uavhengige hvis og bare hvis ingen av dem er lik en skalar ganger den andre.*

Bevis. Påstanden i teoremet kan også formuleres slik: Vektorene er lineært *avhengige* hvis og bare hvis en av dem er lik en skalar ganger den andre. Vi viser dette.

Anta først at **u** og **v** er lineært avhengige. Da finnes to tall a og b slik at

$$\mathbf{u} \cdot a + \mathbf{v} \cdot b = \mathbf{0}$$

og minst én av a og b er ulik 0. Hvis $a \neq 0$, får vi

$$\mathbf{u} = -\frac{b}{a}\mathbf{v}.$$

Hvis $b \neq 0$, får vi

$$\mathbf{v} = -\frac{a}{b}\mathbf{u}.$$

I begge tilfeller har vi at én av vektorene er en skalar ganger den andre.

Nå viser vi den motsatt implikasjonen. Anta derfor at én av vektorene er en skalar ganger den andre. Hvis $\mathbf{u} = c \cdot \mathbf{v}$ for en skalar c, så får vi:

$$\mathbf{u} \cdot 1 + \mathbf{v} \cdot (-c) = \mathbf{0}.$$

Hvis $\mathbf{v} = d \cdot \mathbf{u}$ for en skalar d, så får vi:

$$\mathbf{u} \cdot d + \mathbf{v} \cdot (-1) = \mathbf{0}.$$

I begge tilfeller har vi en ikketriviell løsning av likningen $\mathbf{u} \cdot x_1 + \mathbf{v} \cdot x_2 = \mathbf{0}$, og det betyr at vektorene er lineært avhengige. □

Teoremet sier altså at to vektorer er lineært uavhengige hvis og bare hvis de ikke ligger på en rett linje gjennom origo.

Hvordan sjekke lineær uavhengighet

Det å sjekke om vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige, er (fra definisjonen) det samme som å sjekke om likningen

$$\mathbf{v}_1 \cdot x_1 + \mathbf{v}_2 \cdot x_2 + \cdots + \mathbf{v}_n \cdot x_n = \mathbf{0}$$

har uendelig mange løsninger, eller bare én. Denne likningen kan vi selvfølgelig løse på vanlig måte, ved å gausseliminere totalmatrisen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

Eksempel 5.6. Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 8 \\ 31 \\ 12 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Vi setter opp totalmatrisen for likningssystemet

$$\mathbf{u} \cdot x + \mathbf{v} \cdot y + \mathbf{w} \cdot z = \mathbf{0},$$

og gausseliminerer den:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 8 & 0 \\ 9 & 7 & 31 & 0 \\ 3 & 2 & 12 & 0 \\ 3 & 4 & 22 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi kunne fortsatt videre til redusert trappeform, men allerede her er det tydelig at vi får kun én løsning: $x = y = z = 0$. Dette betyr at vektorene $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige. △

Det essensielle vi trenger å få ut av gausseliminasjonen for å sjekke lineær uavhengighet, er om det blir noen frie variabler eller ikke. Merk også at vi ikke egentlig trenger å ta med høyresidevektoren i gausseliminasjonen. I og med at det er bare 0-er der fra begynnelsen av, kan det aldri bli noe annet enn 0 der, uansett hvilke radoperasjoner vi utfører.

Vi skriver opp et teorem basert på det vi har observert nå.

Teorem 5.7. *La A være en matrise. Følgende påstander er ekvivalente:*

1. *Kolonnene i A er lineært uavhengige.*
2. *Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bare den trivielle løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*
3. *Vi får ingen frie variabler når vi løser $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*
4. *Når vi gausseliminerer A, får vi et pivotelement i hver kolonne.*

Bevis. Påstand 2 er bare en omskrivning av definisjonen av lineær uavhengighet til en matriselikning. Påstand 3 forklarer hvordan vi kan se at likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ikke har mer enn én løsning (husk at vi vet at den alltid har $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ som løsning). Påstand 4 er en omformulering av påstand 3, der vi utnytter at vi vet at den siste kolonnen i totalmatrisen uansett bare består av 0-er, så vi trenger ikke ta den med i gausseliminasjonen. □

Teorem 5.7 gir oss en grei metode for å sjekke lineær uavhengighet. Hvis vi har vektorer

$$\mathbf{v}_1, \; \mathbf{v}_2, \; \ldots, \; \mathbf{v}_n$$

i $\mathbb{R}^m$, kan vi finne ut om de er lineært uavhengige på denne måten:

1. Lag en matrise $A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$ med disse vektorene som kolonner.
2. Gausseliminer A til trappeform.
3. Hvis hver kolonne inneholder et pivotelement, er vektorene lineært uavhengige. Ellers er de lineært avhengige.

Når du gjør dette, bør du imidlertid ikke bare følge denne oppskriften slavisk (og du må for all del ikke pugge slike fremgangsmåter som dette), men huske på at det du egentlig gjør er å sjekke om likningen

$$\mathbf{v}_1 \cdot x_1 + \mathbf{v}_2 \cdot x_2 + \cdots + \mathbf{v}_n \cdot x_n = \mathbf{0}$$

har entydig løsning eller ikke.

Eksempel 5.8. Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Vi gausseliminerer matrisen $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 10 & 7 & 6 \\ 5 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siste kolonne har ikke noe pivotelement. Dermed er $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ lineært avhengige. △

Eksempel 5.9. Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 14 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

For å sjekke dette kan vi gausseliminere denne matrisen:

$$\begin{bmatrix} 8 & 14 & 3 & 7 \\ 7 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Men vi trenger ikke egentlig å utføre gausseliminasjonen. Vi ser med en gang at uansett hva som skjer, så kan vi ikke få mer enn tre pivotelementer (ett i hver rad). Dermed kan det ikke bli pivotelementer i alle de fire kolonnene, så vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ er lineært avhengige. △

Som vi så i dette siste eksempelet, trenger vi ikke alltid å gausseliminere for å finne ut om vektorer er lineært uavhengige eller ikke. Noen ganger kan vi se det på enklere måter.

Vi lister opp noen forskjellige betingelser som kan være nyttige å se etter for å oppdage at vektorer er lineært *avhengige*.

Teorem 5.10. *Gitt n vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ i $\mathbb{R}^m$. Hvis*

1. *en av vektorene er en lineærkombinasjon av de andre, eller*
2. *en av vektorene er $\mathbf{0}$, eller*
3. *$n > m$,*

så er vektorene lineært avhengige.

Bevis. Anta først at én vektor $\mathbf{v}_k$ er en lineærkombinasjon av de andre:

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i \neq k} a_i \mathbf{v}_i$$

Da kan vi sette $a_k = -1$ og få:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Her har vi skrevet nullvektoren som en ikketriviell lineærkombinasjon av vektorene våre (vi vet ikke hva alle a_i-ene er, men vi vet i hvert fall at én av dem, a_k, ikke er 0). Det betyr at vektorene er lineært avhengige.

Nå går vi videre til å se på den andre antagelsen i teoremet, så vi antar at én av vektorene i listen er nullvektoren. Hvis $\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, så kan vi definere n tall $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ved:

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq k \\ 1 & \text{hvis } i = k \end{cases}$$

Da får vi at

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

og vektorene er lineært avhengige.

Til slutt ser vi på den tredje antagelsen. Akkurat som i eksempel 5.9 får vi her at når vi gausseliminerer matrisen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix},$$

så får vi maksimalt m pivotelementer (ett i hver rad), men vi trenger n pivotelementer (ett i hver kolonne) for at vektorene skal være lineært uavhengige. Når $n > m$ går ikke det an, så da er vektorene lineært avhengige. □

Den første betingelsen i teorem 5.10 er ikke bare tilstrekkelig for å få lineær avhengighet, den er ekvivalent med at vektorene er lineært avhengige. Vi viser dette også.

Teorem 5.11. *Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ i $\mathbb{R}^m$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis ingen av dem kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre.*

Bevis. Påstanden i teoremet er det samme som å si at vektorene er lineært avhengige hvis og bare hvis en av dem kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre.

I teorem 5.10 viste vi at dersom en av vektorene er en lineærkombinasjon av de andre, så er de lineært avhengige. Det gjenstår å vise at dersom vektorene er lineært avhengige, så er en av dem en lineærkombinasjon av de andre.

Anta at vektorene er lineært avhengige, altså at vi har

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

der minst én av a_i-ene er ulik 0. Velg en k slik at $a_k \neq 0$. Da har vi:

$$a_k \mathbf{v}_k = \sum_{i \neq k} (-a_i)\mathbf{v}_i$$

Siden $a_k \neq 0$ kan vi dele på a_k og få:

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i \neq k} \frac{-a_i}{a_k} \cdot \mathbf{v}_i$$

Dermed er vektoren $\mathbf{v}_k$ en lineærkombinasjon av de andre vektorene i listen. □

Like mange vektorer som dimensjonen

Til slutt ser vi på hva vi kan si om lineær uavhengighet hvis vi ser på n vektorer i $\mathbb{R}^n$. Nå har vi altså like mange vektorer som dimensjonen til rommet vektorene bor i.

Hvis vi har to vektorer i $\mathbb{R}^2$, så kan vi skille mellom følgende tre tilfeller:

1. Begge vektorene er nullvektoren. Da utspenner de bare mengden bestående av nullvektoren, og de er lineært avhengige.
2. Minst én av vektorene er ulik $\mathbf{0}$, og vektorene ligger på samme linje. Da utspenner de denne linjen, og de er lineært avhengige.
3. Vektorene ligger ikke på samme linje, de peker altså i hver sin retning. Da utspenner de hele planet, og de er lineært uavhengige.

Hvis vi har tre vektorer i $\mathbb{R}^3$, så kan vi skille mellom fire tilfeller:

1. Alle er nullvektoren. Da utspenner de bare mengden bestående av nullvektoren, og de er lineært avhengige.
2. Minst én av vektorene er ulik $\mathbf{0}$, og vektorene ligger på samme linje. Da utspenner de denne linjen, og de er lineært avhengige.
3. Vektorene ligger ikke på samme linje, men det finnes et plan i $\mathbb{R}^3$ som inneholder alle tre. Da utspenner de dette planet, og de er lineært avhengige.
4. Vektorene ligger ikke i samme plan. Da utspenner de hele $\mathbb{R}^3$, og de er lineært uavhengige.

Generelt har vi at n vektorer i $\mathbb{R}^n$ enten er lineært avhengige og utspenner en mengde som er mindre enn $\mathbb{R}^n$, eller så er de lineært uavhengige og utspenner hele $\mathbb{R}^n$.

Teorem 5.12. *Hvis vi har n vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ i $\mathbb{R}^n$, så er de lineært uavhengige hvis og bare hvis de utspenner hele $\mathbb{R}^n$, altså hvis og bare hvis*

$$\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} = \mathbb{R}^n.$$

Bevis. La

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

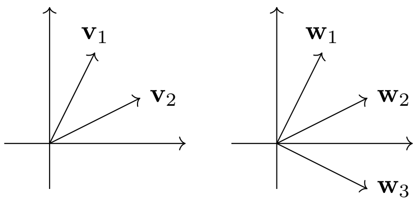
være $n \times n$-matrisen med vektorene våre som kolonner. Vi vet at vektorene er lineært uavhengige hvis og bare hvis vi får pivotelementer i alle kolonner når vi gausseliminerer A. Men siden A er kvadratisk, er dette det samme som at vi får pivotelementer i alle rader. Det er igjen ekvivalent med at

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

har løsning for alle vektorer $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^n$, som er det samme som at kolonnene i A utspenner $\mathbb{R}^n$. $\square$

Oppgaver

1. De to bildene viser vektorer i $\mathbb{R}^2$.



I hvert tilfelle: Er vektorene på tegningen lineært uavhengige? Utspenner de $\mathbb{R}^2$? Begrunn svarene dine.

2.

a) Sjekk at vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige.

b) Finn en tredje vektor $\mathbf{v}$ som sammen med vektorene i **a)** er lineært uavhengige.

c) Vis at $\mathbf{v}$ og vektorene i **a)** til sammen spenner ut $\mathbb{R}^3$. Sammenlign med oppgave **9. b)** i kapittel 3.

3.

a) Sjekk om vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige.

b) Finn en vektor $\mathbf{v}$ som er lineært uavhengig av hver av vektorene i **a)**.

c) Bruk teorien om lineært uavhengige vektorer til å vise at vektorene i **a)** og vektoren $\mathbf{v}$ til sammen spenner ut $\mathbb{R}^3$.

4. Finn ut om følgende påstander er sanne eller ikke.

a) Hvis tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært avhengige, så finnes det to tall a og b slik at:

$$\mathbf{u} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w}$$

b) Hvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært uavhengige, og $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige, så er $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ lineært uavhengige.

c) Hvis $m > n$, så kan vi ikke ha m lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^n$.

5. La A være en $m \times n$-matrise, og la $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Finn ut om følgende påstander er sanne eller ikke (gi et bevis eller et moteksempel).

a) Hvis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t$ er lineært uavhengige, så er $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_t$ også lineært uavhengige.

b) Hvis $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_t$ er lineært uavhengige, så er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t$ også lineært uavhengige.

6 Determinanter

En matrise inneholder mange tall og dermed mye informasjon – så mye at det kan være litt overveldende. Vi kan kondensere ned all informasjonen i en kvadratisk matrise til ett enkelt tall som kalles *determinanten* til matrisen. Dette ene tallet sier oss en hel del om hvordan matrisen oppfører seg.

Vi har to forskjellige notasjoner for determinanter. Hvis

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

er en $n \times n$-matrise, så skriver vi enten

$$\det A \qquad \text{eller} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

for determinanten til A. De to notasjonene betyr akkurat det samme. Den første er praktisk å bruke når vi har en variabel som står for matrisen vi vil ta determinanten av; den andre når vi vil liste opp alle tallene i matrisen.

Determinanter for 2×2-matriser

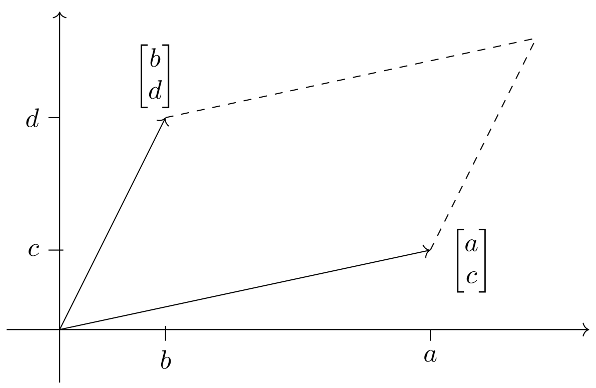
For en 2×2-matrise

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er determinanten definert ved:

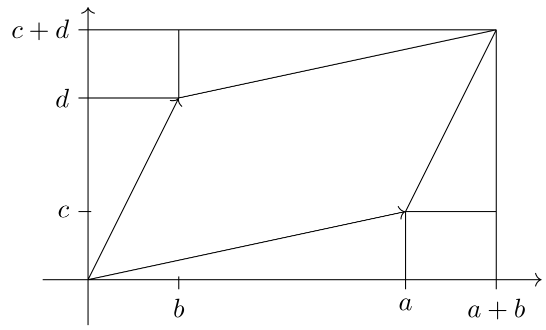
$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinanten har en fin geometrisk tolkning. Vi ser på de to kolonnene i A som vektorer i $\mathbb{R}^2$, tegner dem som piler i planet, og lager et parallellogram med disse som to av sidene. Dette paralellogrammet kan vi kalle parallellogrammet utspent av de to vektorene.



Parallellogrammet utspent av kolonnene i A

La oss beregne arealet av dette parallellogrammet. Vi tegner på noen hjelpelinjer:



Parallellogramarealberegningshjelpefigur

Vi kan finne arealet av parallellogrammet ved å starte med arealet av det store rektangelet, som er

$$(a + b)(c + d),$$

og trekke fra arealene av de to små rektanglene og de fire trekantene som omgir parallellogrammet. Vi ser at hvert av de små rektanglene har areal bc, at de to trekantene øverst og nederst til sammen har areal ac, og at trekantene til venstre og høyre til sammen har areal bd. Det betyr at arealet av parallellogrammet er:

$$\begin{aligned} &(a + b)(c + d) - 2bc - ac - bd \\ &\quad = ac + ad + bc + bd - 2bc - ac - bd \\ &\quad = ad - bc \\ &\quad = \det A \end{aligned}$$

Vi kommer altså frem til at arealet av parallellogrammet utspent av kolonnene i A er lik determinanten til A. Denne utregningen var imidlertid litt avhengig av hvordan disse to kolonnevektorene er plassert i forhold til hverandre i planet. Hvis vi hadde byttet plass på kolonnene, så ville vi isteden fått $bc-ad$ som areal. Da ville altså determinanten vært negativ.

Det som holder i alle tilfeller, er at arealet av parallellogrammet utspent av kolonnene i A er lik absoluttverdien til determinanten:

$$|\det A|$$

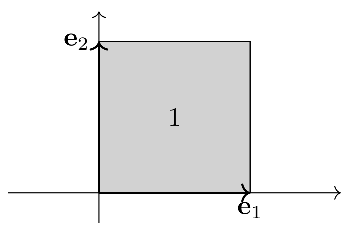
Så determinanten gir oss arealet til et parallellogram. Men hva forteller det oss om matrisen A?

Vi kan tenke på A som en transformasjon av planet der hver vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ sendes til vektoren $A\mathbf{v}$. Determinanten sier noe om hvordan planet endres under denne transformasjonen.

La

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

være de to enhetsvektorene i $\mathbb{R}^2$, og se på kvadratet utspent av disse:



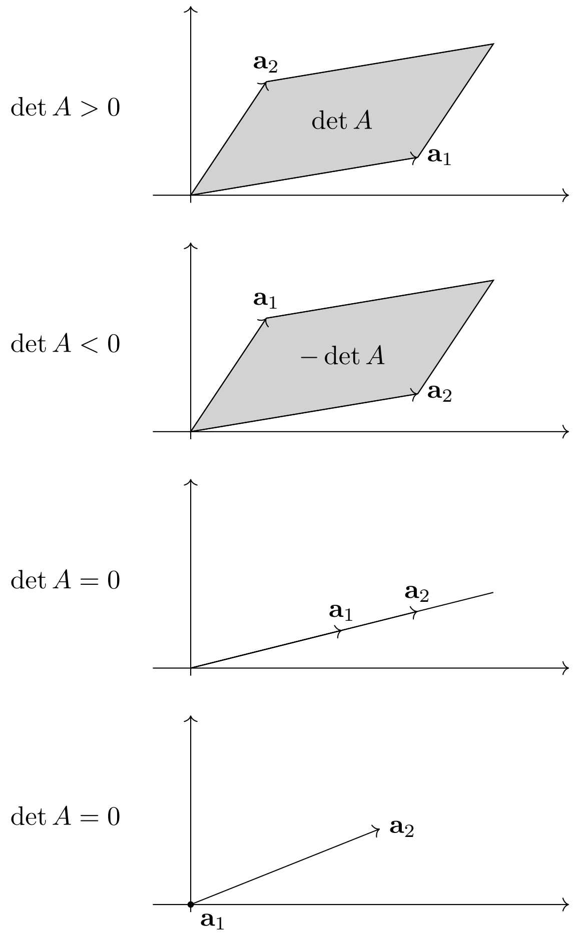
Enhetskvadratet

Nå vil vi se på hva som skjer med dette kvadratet dersom vi sender hvert punkt $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ til $A\mathbf{v}$, der

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$$

er en 2×2-matrise med $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ som kolonner. Da sendes vektoren $\mathbf{e}_1$ til $\mathbf{a}_1$, og vektoren $\mathbf{e}_2$ sendes til $\mathbf{a}_2$. Alle vektorene som ligger inni enhetskvadratet i forrige figur sendes til vektorer som ligger inni parallellogrammet utspent av $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$.

Vi skisserer noen forskjellige muligheter, for forskjellige valg av matrisen A:



I den første figuren har vi en matrise med positiv determinant. Da gjør transformasjonen $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ at enhetskvadratet skaleres til et parallellogram med areal $\det A$. Hvis $\det A > 1$ betyr dette at planet «blåses opp»; hvis $0 < \det A < 1$ betyr det at planet «krympes sammen».

I den andre figuren har vi en matrise med negativ determinant. Da er situasjonen helt lik som i den første figuren, bortsett fra at det er $(-\det A)$ som er arealet. Da får vi at med $\det A < -1$ blir planet «blåst opp», og med $-1 < \det A < 0$ blir det «krympet sammen».

I den tredje og den fjerde figuren har vi situasjoner der determinanten er 0. Det vil si at parallellogrammet utspent av kolonnene i A har areal 0. Det blir altså ikke et virkelig parallellogram i disse tilfellene; det har kollapset til et «degenerert» parallellogram som er bare en linje. På samme måte vil transformasjonen $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ i disse tilfellene kollapse hele planet ned til linjen utspent av $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$.

Determinanter for 3×3-matriser

For en 3×3-matrise

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

er determinanten definert ved:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Her er det også en geometrisk tolkning. Vi kan tegne opp kolonnene i A som piler i $\mathbb{R}^3$, og lage et parallellepiped med disse pilene som tre av sidene. Dette kaller vi for parallellepipedet utspent av de tre vektorene. Da har vi at volumet av parallellepipedet utspent av kolonnene i A er lik absoluttverdien av determinanten til A.

Den generelle definisjonen

Vi definerer determinanten til en vilkårlig stor kvadratisk matrise etter samme mønster som determinanten til en 3×3-matrise.

Definisjon. La

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

være en $n \times n$-matrise. *Determinanten* til A, som har notasjonen $\det A$, defineres på følgende måte.

1. Hvis $n = 1$, så har vi at $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$, og da definerer vi at $\det A = a_{11}$.

2. Hvis $n > 1$, innfører vi først noen hjelpevariabler. For hver i og j fra 1 til n setter vi A_{ij} til å være $(n-1) \times (n-1)$-matrisen vi får ved å fjerne rad i og kolonne j fra A, og vi setter

   $$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

   til å være determinanten til denne matrisen, med et fortegn som avhenger av i og j. Determinanten til A defineres ved:

   $$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j} \qquad \triangle$$

Tallene C_{ij} i definisjonen kalles *kofaktorer* av A.

Det er ikke vanskelig å se at hvis vi setter inn en 2×2-matrise eller en 3×3-matrise i denne generelle definisjonen, så får vi bare de vanlige reglene for determinanter av 2×2- og 3×3-matriser.

For å få litt erfaring med å bruke definisjonen på større matriser regner vi ut determinanten av en 4×4-matrise.

Eksempel 6.1. La A være følgende 4×4-matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi regner ut determinanten til A. Fra definisjonen får vi:

$$\begin{aligned} \det A = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Vi regner ut hver av 3×3-determinantene som trengs (merk at vi ikke trenger å regne ut den andre, for den skal uansett ganges med 0):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

Ved å sette inn disse i uttrykket for $\det A$ får vi:

$$\det A = 3 \cdot 6 - 0 + 2 \cdot (-12) - 4 \cdot (-6) = 18$$

Vi har altså regnet ut at $\det A = 18$. △

Ved hjelp av definisjonen kan vi regne ut determinanten til en hvilken som helst kvadratisk matrise, men det kan bli veldig mye jobb. I eksempelet så vi at determinanten til en 4×4-matrise er definert ut fra determinantene til fire 3×3-matriser, og hver av disse er igjen definert ut fra determinantene til tre 2×2-matriser. Hvis vi går til større matriser, blir arbeidsmengden fort enormt stor.

I løpet av dette kapitlet skal vi se på noen lure teknikker for å regne ut determinanter på mindre arbeidskrevende måter.

Kofaktorekspansjon

I definisjonen av determinanten går vi gjennom første rad i matrisen, og ser på tallene

$$a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n}.$$

Hvert tall a_{1j} ganges med den tilhørende kofaktoren C_{1j}, og til slutt summerer vi alle disse produktene.

Det er imidlertid ikke nødvendig å gå langs første rad når vi gjør dette. Det fungerer like bra å gå langs en annen rad og følge det samme systemet, og resultatet blir det samme. Det går dessuten an å gå langs en hvilken som helst kolonne med samme system. Vi oppsummerer dette i følgende teorem.

Teorem 6.2. *La A være en $n \times n$-matrise, der $n > 1$, og la A_{ij} og C_{ij} være som i definisjonen av determinant. Da har vi*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} C_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{il} C_{il}$$

for alle k og l slik at $1 \le k \le n$ og $1 \le l \le n$.

Å regne ut determinanten ved å beregne en sum av tall fra matrisen ganget med kofaktorer slik som i teoremet kalles *kofaktorekspansjon*. Vi sier at vi gjør kofaktorekspansjon langs rad k eller langs kolonne l.

La oss nå regne ut den samme determinanten som i eksempel 6.1, men på en lurere måte.

Eksempel 6.3. Vi lar igjen A være denne 4×4-matrisen:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi kan observere at den andre kolonnen inneholder nesten bare nuller, så det er lurt å gjøre kofaktorekspansjon langs den. Da får vi:

$$\begin{aligned} \det A &= -0 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &\quad - 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot \left(4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= 2 \cdot (4 \cdot 3 + 3 \cdot (-1)) = 18 \end{aligned}$$

Vi fikk samme resultat som i eksempel 6.1, men med mindre arbeid, siden vi bare trengte å regne ut én 3×3-determinant. △

Vi må passe på at vi får fortegnene i kofaktorene riktig. Når vi gjør kofaktorekspansjon langs første rad (slik som i definisjonen) eller langs første kolonne, starter vi alltid med positivt fortegn i det første leddet. Men når vi ekspanderer langs en annen rad eller kolonne, kan det hende vi må starte med negativt fortegn. Det kan være nyttig å bruke følgende diagram som en huskeregel for hvilket fortegn vi skal ha i de forskjellige kofaktorene:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Determinanter og radoperasjoner

Hvis vi utfører en radoperasjon på en matrise, så får vi en ny matrise. Den matrisen har ikke nødvendigvis samme determinant som den opprinnelige, men det viser seg at determinanten endrer seg på ganske kontrollerte måter når vi utfører radoperasjoner. Dette kan vi utnytte for å spare oss for en del arbeid når vi skal regne ut determinanter, spesielt hvis vi har store matriser.

Teorem 6.4. *La A være en $n \times n$-matrise, og la B være en matrise vi får ved å utføre en radoperasjon på A. Da har vi følgende sammenheng mellom determinantene til A og B, basert på hvilken type radoperasjon vi utførte:*

Radoperasjon	*Resultat*
Gange en rad med et tall k	$\det B = k \cdot \det A$
Legge til et multiplum av én rad i en annen	$\det B = \det A$
Bytte om to rader	$\det B = -\det A$

La oss bruke dette teoremet til å beregne en determinant.

Eksempel 6.5. Vi regner ut $\det A$, der

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 2 & 2 & 13 \\ 4 & 2 & 19 \end{bmatrix}$$

Vi får:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 2 & 2 & 13 \\ 4 & 2 & 19 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 13 \\ 4 & 2 & 19 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -3 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 5 = 30 \end{aligned}$$

Her startet vi med å gjøre radoperasjoner på matrisen, samtidig som vi holdt styr på hvordan determinanten endret seg.

Først ganget vi øverste rad med $1/3$. Det medførte at determinanten til den nye matrisen ble $1/3$ ganger determinanten til A, så vi måtte gange den med 3 for at tallene skal bli like. En hendig måte å huske hvordan dette fungerer er å tenke på det som å sette et tall utenfor parentes. På samme måte som vi kan trekke ut et 3-tall fra en parentes og få

$$(3 + 3 + 12) = 3 \cdot (1 + 1 + 12),$$

kan vi trekke ut et 3-tall fra en rad i en determinant.

Etterpå trakk vi fra multipler av første rad i de to andre radene, men det medførte ingen endring av determinanten.

Så byttet vi de to nederste radene, og det gjorde at determinanten skifter fortegn.

Til slutt gjorde vi kofaktorekspansjon langs den første kolonnen. Siden vi ved å utføre radoperasjoner hadde sørget for å få bare nuller under diagonalen, ble kofaktorekspansjonen enkel og grei. △

Triangulære matriser

Vi sier at en $n \times n$-matrise er *øvre triangulær* hvis alle tall under diagonalen er 0, altså hvis den er på følgende form:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Tilsvarende sier vi at en $n \times n$-matrise er *nedre triangulær* hvis alle tall over diagonalen er 0, altså hvis den er på følgende form:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Eksempel 6.6. I eksempel 6.5 brukte vi radoperasjoner til å skrive om matrisen vår til følgende:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen er øvre triangulær. △

Hvis vi skal finne determinanten til en øvre triangulær matrise er det praktisk å kofaktorekspandere langs første kolonne. Da får vi bare ett ledd i ekspansjonen, nemlig tallet øverst til venstre i matrisen ganget med determinanten til matrisen der første rad og kolonne er fjernet. Denne matrisen er igjen øvre triangulær. Så fortsetter vi med kofaktorekspansjon langs første kolonne i hvert steg nedover. Det vi ender opp med til slutt er å bare gange sammen alle tallene på diagonalen.

Vi oppsummerer dette i et teorem.

Teorem 6.7. *La A være en (øvre eller nedre) triangulær $n \times n$-matrise. Da er determinanten til A lik produktet av tallene på diagonalen i A:*

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$$

Eksempel 6.8. Ved å bruke teoremet kan vi skrive opp determinanten til en triangulær matrise direkte, uten å måtte beregne andre determinanter først:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 5$$

△

Hvis vi skal beregne determinanten til en stor og stygg matrise, er det en god strategi å bruke radoperasjoner for å skrive om matrisen til øvre triangulær form (og holde orden på hvordan determinanten endrer seg ved hjelp av teorem 6.4), og så regne ut determinanten til den triangulære matrisen ved hjelp av teorem 6.7.

Flere regneregler

Vi tar med et par regneregler til for determinanter.

Teorem 6.9. *Determinanten til et produkt av to matriser er produktet av determinantene. Altså: Hvis A og B er to $n \times n$-matriser, så er*

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Teorem 6.10. *Determinanten endrer seg ikke når vi transponerer matrisen. Altså: Hvis A er en $n \times n$-matrise, så er*

$$\det A = \det A^\top.$$

Karakterisering av inverterbarhet

Vi kan bruke determinanten til å sjekke om en matrise er inverterbar eller ikke. Dette kan dessuten knyttes sammen med hvorvidt kolonnene i matrisen vår er lineært uavhengige, og hva det utspenner.

Følgende teorem gir en presis sammenheng mellom inverterbarhet, determinant, lineær uavhengighet og mengden utspent av kolonnene.

Teorem 6.11. *La A være en $n \times n$-matrise. Følgende påstander er ekvivalente:*

1. *A er inverterbar.*
2. $\det A \neq 0$.
3. *Kolonnene i A er lineært uavhengige.*
4. *Kolonnene i A utspenner $\mathbb{R}^n$.*

Oppgaver

1. Regn ut determinanten til følgende matriser og avgjør – basert på dette – om kolonnene er lineært uavhengige:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 2 & 1 \\ -6 & 15 & -9 & -12 & 1 \\ 4 & -8 & 14 & 5 & -6 \\ -2 & 5 & 4 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

2. Skisser parallellogrammet utspent av følgende vektorer i $\mathbb{R}^2$, og regn ut arealet.

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. Regn ut volumet av tetraederet i $\mathbb{R}^3$ med

$$(8, 8, 4), \quad (16, 0, 0), \quad (1, 1, 9) \quad \text{og} \quad (8, 11, -4)$$

som hjørner.

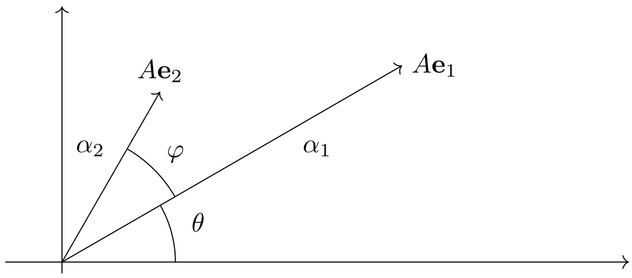
4. La $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ være enhetsvektorene i $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En 2×2-matrise A kan beskrives ved hjelp av fire tall α_1, α_2, θ og φ, der:

α_1 er lengden av vektoren $A\mathbf{e}_1$
α_2 er lengden av vektoren $A\mathbf{e}_2$
θ er vinkelen (mot klokken) opp til vektoren $A\mathbf{e}_1$
φ er vinkelen (mot klokken) fra $A\mathbf{e}_1$ til $A\mathbf{e}_2$

Disse er illustrert på figuren under.



a) Hvordan kan du, basert på tallene α_1, α_2, θ og φ, se om determinanten til A er positiv, negativ eller 0?

b) Forklar hvordan determinanten til A endrer seg hvis vi endrer én av de fire verdiene α_1, α_2, θ og φ, mens vi lar de tre andre forbli som de er.

c) Finn $\det A$ uttrykt ved α_1, α_2, θ og φ.

5. La A være matrisen

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & z \end{bmatrix}.$$

a) Finn $\det A$ uttrykt ved a, b, c og x, y, z.

b) For hvilke a, b, c og x, y, z er A inverterbar?

6. Avgjør om følgende påstander er sanne eller ikke. Gi et bevis eller moteksempel i hvert tilfelle.

a) La A og B være $n \times n$-matriser. Hvis AB er inverterbar, så er både A og B inverterbare.

b) Anta at A er en inverterbar matrise. Da har vi at

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

c) Hvis A og B er $n \times n$-matriser, så er

$$\det(A + B) = \det A + \det B.$$

d) Hvis A og B er $n \times n$-matriser, så er

$$\det(AB) = \det(BA).$$

7. La A være en $n \times n$-matrise, og la $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Anta at $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, men at $A\mathbf{u} = A\mathbf{v}$. Hva kan du da si om determinanten til A?

8. La A være en $m \times n$-matrise slik at

$$\det(A^\top \cdot A) \neq 0.$$

Hva kan du da si om m og n?

9. La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Finn $\det(A \cdot A^\top)$ og $\det(A^\top \cdot A)$.

7 Egenverdier og egenvektorer

Det er ofte hensiktsmessig å tenke på en matrise ikke bare som en tabell med tall, men som en transformasjon av vektorer. Hvis A er en $m \times n$-matrise, så gir A en transformasjon

$$\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$$

fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$. Vi kan anvende A på en vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$, og den vektoren transformeres til en vektor $A\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^m$.

Hvis A er en $n \times n$-matrise, altså en kvadratisk matrise, så sender den vektorer i $\mathbb{R}^n$ til andre vektorer som også er i $\mathbb{R}^n$. Generelt kan vektoren $A\mathbf{v}$ være veldig forskjellig fra $\mathbf{v}$, men noen ganger er den ikke det. Hvis virkningen av A på $\mathbf{v}$ er det samme som å bare gange opp $\mathbf{v}$ med et tall, så kalles $\mathbf{v}$ en *egenvektor* for A, og tallet kalles en *egenverdi*.

I dette kapitlet skal vi se hvordan vi kan finne alle egenverdiene og egenvektorene til en matrise, og vi skal se noen interessante egenskaper de har.

Definisjon av egenverdier og egenvektorer

Vi starter med et enkelt eksempel, slik at vi har et konkret tilfelle vi kan ha i tankene når vi kommer til definisjonen.

Eksempel 7.1. La A være følgende 2×2-matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Vi vil se på hva som skjer med punkter i planet når vi ganger dem med A, altså når vi sender en vektor $\mathbf{x}$ til vektoren $A\mathbf{x}$.

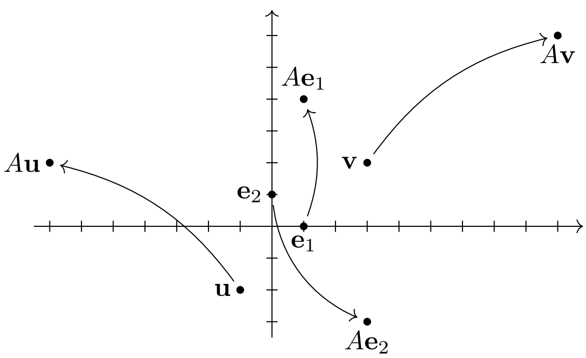
Vi velger følgende fire vektorer og ser hva A gjør med dem:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi får:

$$A\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \ A\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \ A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}, \ A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

La oss tegne opp de fire vektorene, samt vektorene A sender dem til, som punkter i planet.



Matrisen A kaster vektorene rundt i planet

Vi ser at matrisen sender de fire eksempelvektorene våre i forskjellige retninger. Men akkurat vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er interessant. Det som skjer med den er at den blir sendt til

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix},$$

men det er jo det samme som $3 \cdot \mathbf{v}$. Virkningen av matrisen A på akkurat denne vektoren er altså bare å skalere den opp med 3:

$$A\mathbf{v} = 3\mathbf{v} \qquad \triangle$$

Teorien om egenverdier og egenvektorer handler om å identifisere slike situasjoner som den vi så i eksempelet, der virkningen av en matrise på en vektor blir det samme som å bare gange opp vektoren med et tall.

Definisjon. La A være en $n \times n$-matrise, λ et tall og $\mathbf{v}$ en vektor i $\mathbb{R}^n$ som ikke er nullvektoren. Hvis

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

så sier vi at tallet λ er en *egenverdi* for matrisen A, og at vektoren $\mathbf{v}$ er en *egenvektor* for A som hører til egenverdien λ. △

Et par merknader – én matematisk og én språklig – er på sin plass etter denne definisjonen.

Merk. Hvorfor sier vi at $\mathbf{v}$ ikke skal være nullvektoren? Jo, for hvis vi setter inn nullvektoren for $\mathbf{v}$, så får vi likningen

$$A \cdot \mathbf{0} = \lambda \cdot \mathbf{0},$$

som er oppfylt for alle matriser A og alle tall λ. Hvis vi hadde tillatt nullvektoren som en egenvektor, så ville vi altså fått at alle tall er egenverdier for alle matriser. Da blir egenverdibegrepet ganske meningsløst. △

Merk. Det er vanlig å bruke den greske bokstaven λ som variabelnavn for egenverdier. Vi kunne i og for seg brukt en hvilken som helst annen bokstav, men siden det er λ folk vanligvis bruker, så gjør vi det. Navnet på bokstaven uttales «lambda», og den tilsvarer bokstaven *l* i det latinske alfabetet. Hvis vi for eksempel skriver navnet på filosofen Platon på hans eget språk, så er λ den andre bokstaven: Πλατων. △

Eksempel 7.2. Vi ser igjen på matrisen A fra eksempel 7.1. Vi så at vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

oppfylte likheten

$$A\mathbf{v} = 3\mathbf{v}.$$

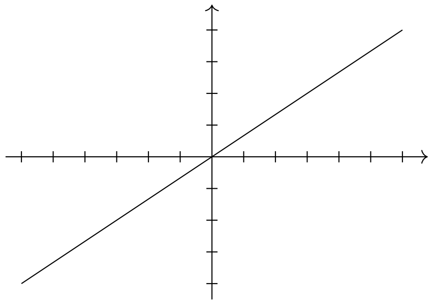
Det betyr at 3 er en egenverdi for matrisen A, og at $\mathbf{v}$ er en egenvektor som hører til egenverdien 3.

Finnes det flere egenvektorer? Hvis vi ser på en vektor som er parallell med $\mathbf{v}$, altså som er på formen $\mathbf{w} = c \cdot \mathbf{v}$ der c er et tall, så får vi:

$$A\mathbf{w} = A \cdot (c\mathbf{v}) = c \cdot (A\mathbf{v}) = c \cdot (3\mathbf{v}) = 3 \cdot \mathbf{w}$$

Enhver slik vektor er altså en egenvektor som hører til egenverdien 3, forutsatt at den ikke er nullvektoren.

Vi har altså funnet ut at A i hvert fall har én egenverdi, nemlig 3, og uendelig mange egenvektorer som hører til denne egenverdien, nemlig alle vektorene på denne linjen (unntatt nullvektoren):



Det vi foreløpig ikke vet, er om det kan finnes enda flere egenvektorer, og om A har flere egenverdier enn 3. Vi skal vende tilbake til dette eksempelet om en stund og finne ut av dette, etter at vi har kommet frem til en generell metode for å finne alle egenverdiene og egenvektorene til en matrise. △

I eksempelet så vi at vi ut fra én egenvektor kunne finne uendelig mange egenvektorer som hørte til den samme egenverdien. Vi formulerer dette generelt som et teorem. (Beviset får du enkelt ved å generalisere det vi gjorde i eksempelet.)

Teorem 7.3. *Anta at λ er en egenverdi for en $n \times n$-matrise A, og at $\mathbf{v}$ er en tilhørende egenvektor. Da er alle multipler $c\mathbf{v}$ av vektoren $\mathbf{v}$, der c er et tall som ikke er 0, også egenvektorer som hører til egenverdien λ. Med andre ord er alle vektorer i mengden $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}\}$, unntatt nullvektoren, egenvektorer som hører til egenverdien λ.*

En annen ting som vi enkelt kan se ut fra definisjonen av egenverdier og egenvektorer, er hva som skal til for at en matrise skal ha 0 som egenverdi. Hvis vi setter inn 0 for λ i likheten

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

så får vi $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Det vil si at en matrise A har 0 som egenverdi hvis og bare hvis likningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

har ikketrivielle løsninger, og dette er igjen sant hvis og bare hvis A ikke er inverterbar. Vi formulerer dette også som et teorem.

Teorem 7.4. *En $n \times n$-matrise A har 0 som egenverdi hvis og bare hvis den ikke er inverterbar.*

Noen geometriske eksempler

Før vi utleder den generelle fremgangsmåten for å regne ut egenverdier og egenvektorer, tar vi noen enkle eksempler der vi kan se geometrisk hva egenverdiene og egenvektorene må være.

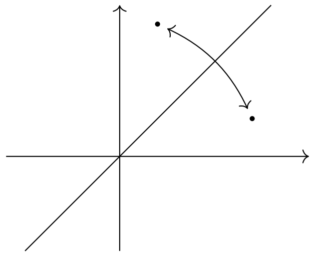
Eksempel 7.5. La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Da er

$$A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

for enhver vektor (v_1, v_2) i $\mathbb{R}^2$. Virkningen av A er altså en refleksjon om diagonallinjen som går gjennom origo og punktet $(1, 1)$.



Matrisen A reflekterer vektorene om diagonalen

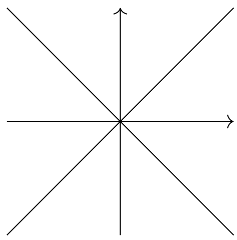
Vi ser lett at alle punkter på denne diagonalen sendes til seg selv, så disse oppfyller likheten

$$A\mathbf{v} = \mathbf{v},$$

og er altså egenvektorer tilhørende egenverdien 1. Når vi tenker oss litt mer om, finner vi dessuten ut at alle punkter på den omvendte diagonalen reflekteres gjennom origo slik at de oppfyller likheten

$$A\mathbf{v} = -\mathbf{v}$$

og er egenvektorer tilhørende egenverdien -1. Da har vi funnet at alle vektorene på disse to diagonallinjene (unntatt nullvektoren, selvsagt) er egenvektorer:



Egenvektorene er på diagonalene

Men for alle andre vektorer $\mathbf{v}$ i planet gjør refleksjonen av $A\mathbf{v}$ peker i en annen retning enn $\mathbf{v}$, så det finnes ikke flere egenvektorer. △

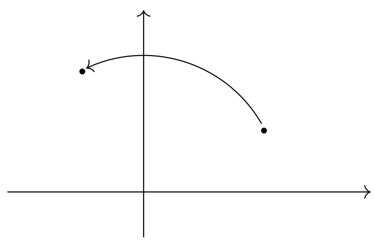
Eksempel 7.6. La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Da er

$$A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

for enhver vektor (v_1, v_2) i $\mathbb{R}^2$. Virkningen av A er altså å rotere planet med 90°.



Matrisen A roterer planet

Dermed kan ikke A ha noen egenvektorer, siden enhver vektor (utenom nullvektoren) sendes til en som peker i en annen retning. △

Hvordan finne egenverdier/-vektorer

Gitt en $n \times n$-matrise A, hvordan kan vi finne alle egenverdiene og egenvektorene dens?

Ut fra definisjonen er vi på jakt etter tall λ og vektorer $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ som oppfyller likheten

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Vi har altså en likning med både λ og $\mathbf{v}$ som ukjente, og den ser ved første øyekast ganske uhåndterlig ut. Men vi kan trikse litt med den. Vi kan først flytte alt over til venstre side:

$$A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Nå fremstår det som veldig fristende å sette **v**-en utenfor parentes, altså å skrive $(A - \lambda)\mathbf{v}$. Men det går ikke an, for uttrykket $A - \lambda$, altså en matrise minus et tall, gir ikke mening.

Nå kan vi bruke et lurt triks: Vi ganger inn identitetsmatrisen I_n. Vi vet at $I_n\mathbf{v}$ bare blir $\mathbf{v}$ uansett hva vektoren $\mathbf{v}$ er, så vi kan skrive om likningen til:

$$A\mathbf{v} - \lambda I_n\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Det vi har oppnådd nå er at vi har en $n \times n$-matrise ganget med $\mathbf{v}$ i hvert ledd, og da kan vi sette $\mathbf{v}$ utenfor parentes:

$$(A - \lambda I_n) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Nå ser vi at λ er en egenverdi for A hvis og bare hvis likningen

$$(A - \lambda I_n) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

har en ikketriviell løsning. Men dette er bare et vanlig lineært likningssystem med

$$A - \lambda I_n$$

som koeffisientmatrise, og vi vet fra før at et slikt system har ikketrivielle løsninger hvis og bare hvis

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Her har vi endt opp med en likning med bare λ som ukjent. Vi kan altså løse denne for å finne egenverdiene, uten at vi samtidig må tenke på hva de tilhørende egenvektorene skal være.

Vi oppsummerer det vi har funnet ut i et teorem.

Teorem 7.7. *La A være en $n \times n$-matrise.*

(a) Egenverdiene til A er alle løsninger λ av likningen

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

(b) Hvis λ er en egenverdi for A, så er de tilhørende egenvektorene gitt ved alle ikketrivielle løsninger av likningen

$$(A - \lambda I_n) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Uttrykket

$$\det(A - \lambda I_n),$$

som står på venstresiden av likningen vi løser for å finne egenverdiene, blir et n-tegradspolynom i λ. Vi kaller det for det *karakteristiske polynomet* til A.

Eksempel 7.8. Nå kan vi bruke teorem 7.7 til å finne alle egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

fra eksempel 7.1.

Vi finner egenverdiene ved å løse likningen

$$\det(A - \lambda I_2) = 0,$$

der venstresiden er det karakteristiske polynomet til A. La oss først se hvordan matrisen $A - \lambda I_2$ ser ut:

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

Det karakteristiske polynomet blir:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-3-\lambda) - 3 \cdot 4 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda - 15 \end{aligned}$$

Det betyr at vi kan løse andregradslikningen

$$\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$$

for å finne egenverdiene. Vi løser den på vanlig måte og får:

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-15)}}{2} = -1 \pm 4$$

Vi får altså to egenverdier: 3 og -5.

Vi finner alle egenvektorer som hører til egenverdien 3 ved å løse likningen $(A - 3I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi kan løse denne likningen ved å gausseliminere matrisen $(A - 3I_2)$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får én fri variabel, og løsningene blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot t$$

for alle tall t. Egenvektorene som hører til egenverdien 3 er altså alle vektorer i

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

unntatt nullvektoren.

Vi finner alle egenvektorer som hører til egenverdien -5 ved å løse likningen $(A + 5I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi kan løse denne likningen ved å gausseliminere matrisen $(A + 5I_2)$:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får én fri variabel, og løsningene blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot t$$

for alle tall t. Egenvektorene som hører til egenverdien -5 er altså alle vektorer i

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\},$$

unntatt nullvektoren. △

Egenrom

Vi har sett at egenverdiene til en matrise er noen enkeltverdier, mens egenvektorene er uendelig mange (dersom matrisen har egenverdier og egenvektorer). I eksempel 7.8 beskrev vi egenvektorene tilhørende en gitt egenvektor ved å si «alle vektorer i (...) unntatt nullvektoren». Vi innfører nå et nytt begrep som gjør det litt enklere å beskrive alle egenvektorene til en egenverdi.

Definisjon. La A være en $n \times n$-matrise, og anta at λ er en egenverdi for A. Da er *egenrommet* til λ mengden av alle egenvektorer som hører til λ, samt nullvektoren; altså mengden

$$\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \}. \qquad \triangle$$

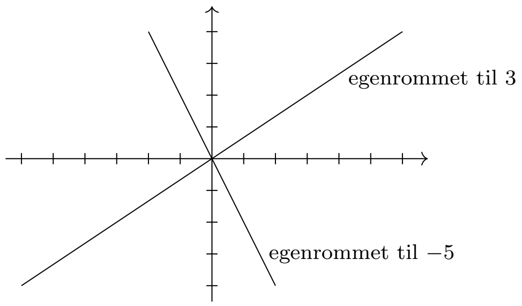
Eksempel 7.9. I eksempel 7.8 kunne vi sagt at egenrommet til egenvektoren 3 er

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

og at egenrommet til egenvektoren -5 er

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Hvert av disse to egenrommene er en linje i planet:



$\triangle$

La oss nå ta et litt større eksempel.

Eksempel 7.10. Vi finner egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 12 & 4 & -6 \\ -20 & 0 & 14 \end{bmatrix},$$

og de tilhørende egenrommene.

Det karakteristiske polynomet til A er:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -8-\lambda & 0 & 6 \\ 12 & 4-\lambda & -6 \\ -20 & 0 & 14-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -8-\lambda & 6 \\ -20 & 14-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)\big((-8-\lambda)(14-\lambda) + 6 \cdot 20\big) \\ &= (4-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) \end{aligned}$$

Vi finner altså egenverdiene til A ved å løse tredjegradslikningen

$$(4-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0.$$

Denne likningen er ekvivalent med at

$$4 - \lambda = 0 \qquad \text{eller} \qquad \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Andregradslikningen $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ har løsninger

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}}{2} = 3 \pm 1,$$

så vi får to egenverdier: 2 og 4.

Vi finner egenrommene ved å løse likningene

$$(A - 2I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{og} \qquad (A - 4I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Vi tar ikke med all utregningen her, men du bør gjøre den selv. Resultatet blir at egenrommet til egenverdien 2 er

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\},$$

og egenrommet til egenverdien 4 er

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Egenrommet til 2 er altså en linje i $\mathbb{R}^3$, mens egenrommet til 4 er et plan. $\triangle$

Diagonalmatriser

La oss se på noen eksempler på matriser der det er veldig lett å se hva egenverdiene er.

Eksempel 7.11. Har identitetsmatrisen I_n noen egenverdier? Vi vet at

$$I_n \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v}$$

for alle vektorer $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$. Dermed ser vi at I_n har tallet 1 som egenverdi, med hele $\mathbb{R}^n$ som det tilhørende egenrommet. $\triangle$

Eksempel 7.12. La A være følgende 2×2-matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Da har vi at

$$A\mathbf{v} = 9\mathbf{v}$$

for alle $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$. Det betyr at 9 er en egenverdi for A, og det tilhørende egenrommet er hele $\mathbb{R}^2$. $\triangle$

Eksempel 7.13. La A være følgende 3×3-matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da har vi at

$$A \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7v_1 \\ -3v_2 \\ 1v_3 \end{bmatrix}$$

for en vektor (v_1, v_2, v_3) i $\mathbb{R}^3$. Da ser vi lett at de tre enhetsvektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer, med 7, -3 og 1 som tilhørende egenverdier. Det er også lett å se at hvis vi har en vektor (v_1, v_2, v_3) der minst to av komponentene v_1, v_2 og v_3 ikke er 0, så kan den ikke være en egenvektor, siden komponentene ganges opp med ulike tall når vi ganger vektoren med A.

Vi ser altså at matrisen har egenverdiene 7, -3 og 1, med

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\} \quad \text{og} \quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

som tilhørende egenrom. △

I alle disse tre eksemplene hadde vi matriser der de eneste tallene som ikke er 0 er på diagonalen. Vi gir et navn til slike matriser.

Definisjon. En *diagonalmatrise* er en kvadratisk matrise der alle tall utenfor diagonalen er 0, altså en matrise på følgende form:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

△

På samme måte som i eksemplene over kan vi lett finne egenverdiene til enhver diagonalmatrise.

Teorem 7.14. *Egenverdiene til en diagonalmatrise er tallene på diagonalen.*

Lineær uavhengighet av egenvektorer

Vi skal nå ta en ganske omfattende diskusjon om hvorvidt egenvektorer er lineært uavhengige av hverandre, og hva vi kan si om vektorer som ligger i mengden utspent av noen gitte egenvektorer.

Hele diskusjonen kommer til å bli konkludert med et fint og flott teorem (teorem 7.15), men la oss ikke se på konklusjonen helt med en gang. For å prøve å forstå hvordan man kunne kommet frem til det teoremet på egen hånd, skal vi bygge oss opp mot det i små steg. Vi begynner med å se på én egenvektor, og deretter to egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier. Vi ser hva vi kan si om disse, og etter hvert kommer vi til å nærme oss et generelt resultat.

Gjennom alt det vi skal gjøre nå lar vi A være en $n \times n$-matrise.

Vi vet fra før (teorem 7.3) at hvis vi har en egenvektor $\mathbf{v}$ som hører til en egenverdi λ, så er enhver vektor i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}\}$, utenom nullvektoren, også en egenvektor som hører til λ. Vi har altså:

Hvis $\mathbf{w}$ *er en skalar ganger en egenvektor* $\mathbf{v}$*, og ikke er lik nullvektoren, så er* $\mathbf{w}$ *en egenvektor tilhørende samme egenverdi som* $\mathbf{v}$*.*

Dette enkle og greie resultatet skal vi utnytte når vi nå går videre til å se på flere egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier.

La oss se på hva vi kan si hvis vi har to egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 \text{ og } \mathbf{v}_2$$

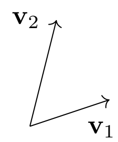
som hører til to forskjellige egenverdier

$$\lambda_1 \text{ og } \lambda_2.$$

Vi vet at alle vektorer i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1\}$ er egenvektorer som hører til egenverdien λ_1. Dermed er det klart at $\mathbf{v}_2$ ikke kan være i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1\}$, siden $\mathbf{v}_2$ hører til egenverdien λ_2. På samme måte ser vi at $\mathbf{v}_1$ ikke kan være i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_2\}$. Dermed ser vi (ved å bruke teorem 5.5, eller ved å tenke selv) at vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige. Vi har altså vist:

To egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier må være lineært uavhengige.

Dette betyr at vi kan se for oss de to vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ som to piler som peker i forskjellige retninger:



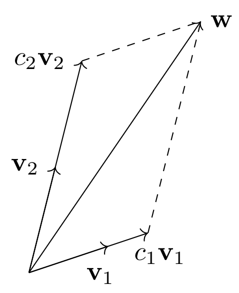
De to egenvektorene våre

La oss nå se hva vi kan si om en vektor $\mathbf{w}$ i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, altså i planet utspent av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. En slik vektor $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, så det finnes tall c_1 og c_2 slik at

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2.$$

For det første: Hvis $c_2 = 0$, så er $\mathbf{w}$ bare et tall ganger $\mathbf{v}_1$, og da vet vi at den er en egenvektor som hører til egenverdien λ_1. På samme måte får vi at hvis $c_1 = 0$, så er $\mathbf{w}$ en egenvektor som hører til egenverdien λ_2. Men hva kan vi si dersom både c_1 og c_2 er forskjellige fra 0, altså dersom $\mathbf{w}$ ikke ligger i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1\}$ eller i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_2\}$?

Vi tegner inn $\mathbf{w}$ på tegningen vår, og får med hvordan den er en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$:

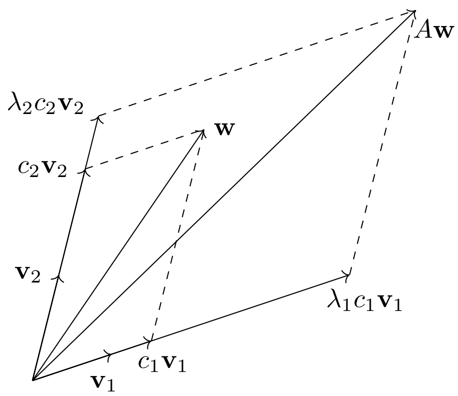


Vektoren $\mathbf{w}$ *er en lineærkombinasjon av* $\mathbf{v}_1$ *og* $\mathbf{v}_2$

Nå vil vi finne ut om $\mathbf{w}$ er en egenvektor eller ikke, altså om det finnes et tall λ slik at $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$. Vi ser på uttrykket $A\mathbf{w}$. Siden vi vet at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektorer tilhørende egenverdiene λ_1 og λ_2, får vi:

$$A\mathbf{w} = Ac_1\mathbf{v}_1 + Ac_2\mathbf{v}_2 = \lambda_1 c_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2 c_2\mathbf{v}_2$$

Vi tegner inn $A\mathbf{w}$ også på tegningen vår:



Vektoren $A\mathbf{w}$ må peke i en annen retning enn $\mathbf{w}$ fordi $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Denne siste figuren viser at $\mathbf{w}$ ikke kan være en egenvektor. Den eneste muligheten for å få $A\mathbf{w}$ til å peke i samme retning som $\mathbf{w}$ er å anta at $\lambda_1 = \lambda_2$, og vi har jo antatt akkurat det motsatte, nemlig at $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Denne figuren er det man bør se for seg for å forstå hva som skjer, men vi kan vise det samme på en mer presis og rent algebraisk måte som ikke avhenger av figuren.

Hvis vi ganger $\mathbf{w}$ med et tall λ, så får vi:

$$\lambda\mathbf{w} = \lambda c_1\mathbf{v}_1 + \lambda c_2\mathbf{v}_2$$

Og vi så at hvis vi ganger A med $\mathbf{w}$, så får vi:

$$A\mathbf{w} = \lambda_1 c_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2 c_2\mathbf{v}_2$$

Hvis $\mathbf{w}$ er en egenverdi, så finnes det en λ slik at $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$, og dermed:

$$\lambda_1 c_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2 c_2\mathbf{v}_2 = \lambda c_1\mathbf{v}_1 + \lambda c_2\mathbf{v}_2$$

Siden $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige, betyr dette at

$$\lambda_1 c_1 = \lambda c_1 \qquad \text{og} \qquad \lambda_2 c_2 = \lambda c_2.$$

Men vi har antatt at både c_1 og c_2 er forskjellige fra 0 og at $\lambda_1 \neq \lambda_2$, og da er dette umulig. Det vil si at $\mathbf{w}$ ikke er en egenvektor.

Nå har vi vist:

Hvis $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av to egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier, så er det to muligheter: Enten er $\mathbf{w}$ lik en skalar ganger én av de to egenvektorene, eller så er $\mathbf{w}$ ikke en egenvektor.

Nå går vi videre til å se på tre egenvektorer

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2 \text{ og } \mathbf{v}_3$$

som hører til forskjellige egenverdier

$$\lambda_1,\ \lambda_2 \text{ og } \lambda_3.$$

Da kan vi bruke det vi nettopp viste til å konkludere med at ingen av disse egenvektorene kan være en lineærkombinasjon av de andre to. For hvis $\mathbf{v}_3$ skulle vært i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, så ville vi fått at den enten er nullvektoren, eller en skalar ganger $\mathbf{v}_1$ eller $\mathbf{v}_2$ (men da ville den hatt λ_1 eller λ_2 som tilhørende egenverdi istedenfor λ_3), eller så ville den ikke vært en egenvektor i det hele tatt. Alle disse alternativene er utelukket, siden vi har antatt at $\mathbf{v}_3$ er en egenvektor tilhørende egenverdien λ_3.

På samme måte får vi at $\mathbf{v}_2$ ikke kan være i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ og at $\mathbf{v}_1$ ikke kan være i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Siden vi har vist at ingen av de tre vektorene er en lineærkombinasjon av de andre to, får vi (fra teorem 5.11) at de er lineært uavhengige. Vi har altså vist:

Tre egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier må være lineært uavhengige.

Men vi trenger ikke å gi oss der. Ved et helt tilsvarende argument som det vi hadde i tilfellet med to vektorer kan vi vise:

Hvis $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av tre egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier, så er det to muligheter: Enten er $\mathbf{w}$ lik en skalar ganger én av de tre egenvektorene, eller så er $\mathbf{w}$ ikke en egenvektor.

Hvis du fremdeles henger med, så ser du antagelig hvordan vi nå kan gå videre til:

Fire egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier må være lineært uavhengige.

Herfra kan vi fortsette på akkurat samme måte, og vi får de samme resultatene for enhver liste av vilkårlig mange egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier. Da har vi kommet til slutten på vår lange diskusjon om lineær uavhengighet for egenvektorer, og vi oppsummerer det vi har funnet ut i et teorem.

Teorem 7.15. *La λ_1, λ_2, ..., λ_t være forskjellige egenverdier for en matrise A, og la $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_t$ være egenvektorer som hører til hver av disse egenverdiene. Da har vi:*

(a) Vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_t$ er lineært uavhengige.

(b) I mengden

$$\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \cdots,\ \mathbf{v}_t\}$$

utspent av egenvektorene vi ser på finnes det ingen andre egenvektorer enn de som er et multippel $c \cdot \mathbf{v}_i$ av én av vektorene i listen.

Oppgaver

1. Finn egenverdier og tilhørende egenvektorer til følgende matriser.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

Hint for del **d)**: Polynomdivisjon. Hvis ikke $\lambda = 1$ fungerer, prøv $\lambda = 2$. Hvis ikke $\lambda = 2$ fungerer, prøv $\lambda = 3, \ldots$

2.

a) Regn ut egenverdiene til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

og finn tilhørende egenrom.

b) Skissér egenrommene.
Hint: Du har løst denne oppgaven tidligere.

3.

a) Regn ut egenvektorene til

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

og finn tilhørende egenrom.

b) Skissér egenrommene.

4.

a) Vis at matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ikke har noen egenverdier.

b) Gi en geometrisk forklaring på del **a)**.

5.

a) Finn vektorene som svarer til at

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er blitt rotert med θ radianer.

b) Utled formelen for 2×2-matrisen T_θ som roterer vektorer θ radianer mot klokken ved multiplikasjon.
Hint: Hva skjer når du ganger T_θ med $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$?

c) For hvilke verdier av θ har T_θ en egenverdi? Gi en geometrisk forklaring.

6. Avgjør om følgende påstander er sanne eller ikke. Begrunn svaret ditt.

a) En $n \times n$-matrise har alltid n egenverdier.

b) Dersom A har en ikke-null egenverdi c, så kan ikke A være lik null-matrisen.

c) To egenvektorer til en matrise A som svarer til samme egenverdi kan være lineært uavhengige.

7. La A være en $n \times n$-matrise. Vis at A og dens transponerte $A^\top$ har like egenverdier.
Hint: Husk at determinanten til en matrise B og dens transponerte $B^\top$ er like.

8.

a) Regn ut egenverdiene til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 77 \end{bmatrix}.$$

b) Finn egenrommene til de ulike egenverdiene.

c) A er en 4×4-matrise. Er det alltid enkelt å finne egenverdiene til en 4×4-matrise? Mer generelt, er det alltid enkelt å finne egenverdiene til $n \times n$-matriser?

9. La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 28 & 30 & -20 & -2 \\ 6 & 40 & -10 & -4 \\ 4 & 10 & 20 & -6 \\ 2 & 20 & -30 & 32 \end{bmatrix}$$

a) Hvilke av vektorene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer for A?

b) Finn alle egenverdiene til A, og de tilhørende egenrommene.

10. La A være en $n \times n$-matrise slik at $A^2 = A$. Hva kan du da si om egenverdiene til A?
Hint: Prøv å finne noen forskjellige matriser A som er slik at $A^2 = A$. Kan du finne en slik matrise som ikke har noen egenverdier? En som har én egenverdi? To egenverdier? Flere enn to?

11. La A være en $n \times n$-matrise som har n forskjellige egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Lag en $n \times n$-matrise

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix},$$

der $\mathbf{v}_1$ er en egenvektor som hører til egenverdien λ_1, og $\mathbf{v}_2$ er en egenvektor som hører til egenverdien λ_2, og så videre.

a) Kan du finne ut om matrisen V er inverterbar eller ikke?

b) Dersom V er inverterbar, hvordan ser matrisen $V^{-1}AV$ ut?

c) Finn en 3×3-matrise som har egenverdier 1, 2 og 3, med tilhørende egenvektorer

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

8 Vektorrom

I de foregående kapitlene har vi tatt en lang vandring gjennom den lineære algebraens jungel. Nå skal vi gå opp på en fjelltopp og skue ut over landskapet vi har vandret gjennom.

Det sentrale temaet i dette kapitlet og det neste er å generalisere og abstrahere ideene vi har jobbet med til nå. Vi skal definere begrepet *vektorrom*, som egentlig bare betyr en mengde med vektorer slik som $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. Men definisjonen vår av vektorrom kommer til å være så generell at vi også kan ha vektorrom som ser helt annerledes ut. Dette betyr at vi skal bli vant til at vektorer kan være mye mer enn kolonnevektorene vi kjenner til – for eksempel kan en funksjon eller en matrise også være en vektor.

I neste kapittel skal vi innføre det andre sentrale konseptet vi trenger for å drive med lineær algebra på en generell måte, nemlig *lineærtransformasjoner*. En lineærtransformasjon er en funksjon fra et vektorrom til et annet. Men den kan ikke være en hvilken som helst funksjon – vi krever at den skal *bevare vektorromsstrukturen.*

Den generelle formuleringen av lineær algebra ved hjelp av vektorrom og lineærtransformasjoner gir flere fordeler. Den gir oss et språk og en del teknikker som (etter hvert som vi blir vant til dem) gjør mange problemer mye mer lettfattelige. Og den gjør at vi kan anvende lineær algebra innen andre områder av matematikk, for eksempel til å løse differensiallikninger, som vi skal se på senere.

Vi kan stille oss selv spørsmålet

> *Hva handler lineær algebra egentlig om?*

Hva som er et naturlig svar på dette spørsmålet endrer seg etter hvert som vi lærer mer lineær algebra. Helt i begynnelsen ville vi antagelig sagt at lineær algebra handler om å løse lineære likningssystemer. Litt senere kunne vi si at lineær algebra handler om vektorer og matriser. Etter at vi har kommet oss gjennom dette kapitlet og det neste, vil vi antagelig besvare spørsmålet med:

> *Lineær algebra handler om vektorrom og lineærtransformasjoner.*

Og da har vi en ganske god forståelse av lineær algebra.

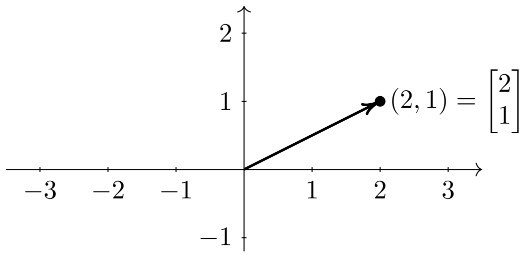
Vektorer slik vi kjenner dem

Vi er vant til vektorer i $\mathbb{R}^2$ og i $\mathbb{R}^3$, og mer generelt i $\mathbb{R}^n$. Vi vet dessuten at hver av disse mengdene utgjør hver sin separate verden av vektorer. For eksempel kan vi alltid legge sammen to vektorer som begge er i $\mathbb{R}^2$, men det gir ikke mening å legge sammen en vektor i $\mathbb{R}^2$ med en vektor i $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix} \quad \text{er ikke definert.}$$

Når vi legger sammen to vektorer i $\mathbb{R}^2$, blir summen igjen en vektor i $\mathbb{R}^2$, og når vi ganger en vektor i $\mathbb{R}^2$ med en skalar, får vi også en vektor i $\mathbb{R}^2$ som resultat. Vi holder oss altså alltid innenfor den samme verdenen når vi tar lineærkombinasjoner av vektorer. En slik verden av vektorer er det vi kaller et vektorrom.

For $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$ har vi en geometrisk tolkning av vektorer: Vi kan tenke på en vektor som et punkt i planet/rommet, eller som pilen som peker fra origo til dette punktet. Men et punkt har også koordinater, og det er de vi vanligvis bruker når vi skal regne på vektorer.



Forskjellige aspekter av samme vektor: punkt – pil – koordinater

Antagelig er du innen nå blitt såpass komfortabel med dette litt fleksible vektorbegrepet at du uten problemer går frem og tilbake mellom å tenke på en vektor som en pil, et punkt, eller en kolonnevektor.

Nå skal vi bli enda mer fleksible i vår forståelse av hva en vektor kan være. Faktisk vil vi si at det er fullstendig likegyldig hva en vektor *er*, det som betyr noe er hvordan den *oppfører seg.*

Hva kan vi gjøre med vektorer?

Vi har to operasjoner for vektorer. Vi kan legge sammen vektorer, og vi kan gange en vektor med en skalar:

$$\begin{aligned} \text{addisjon av vektorer:}\quad & \mathbf{u} + \mathbf{v} \\ \text{skalarmultiplikasjon:}\quad & c \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Begge operasjonene gir ut nye vektorer som resultat.

Når vi nå skal generalisere vektorbegrepet, vil vi si at alle slags ting kan være vektorer, så lenge de kan adderes og skalarmultipliseres, og oppfyller visse kriterier som gjør at vi kan regne med dem på samme måte som vi er vant til å regne med vektorer. Disse kriteriene kaller vi *aksiomene* for et vektorrom.

Aksiomer for vektorrom

Aksiomene for vektorrom er åtte regneregler som holder for vektorene i $\mathbb{R}^n$, og som er essensielle for at vektorer skal oppføre seg slik vi synes at vektorer skal oppføre seg. Vi nummererer aksiomene (V1), (V2), ..., (V8). Du finner alle sammen i en fin liste på side 38.

Det første aksiomet, (V1), sier at det ikke har noe å si hvor vi setter parentesene når vi legger sammen vektorer:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

Dette betyr at vi kan skrive en sum

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

Vektorromsaksiomene

aksiomer for addisjon

(V1) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.
(Vektoraddisjon er en *assosiativ* operasjon.)

(V2) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.
(Vektoraddisjon er en *kommutativ* operasjon.)

(V3) Det finnes en vektor $\mathbf{0}$ slik at $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$.
(Vektoraddisjon har et *identitetselement*.)

(V4) For hver vektor $\mathbf{u}$ finnes en vektor $-\mathbf{u}$ slik at $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$.
(Vektoraddisjon har *inverser* for alle elementer.)

aksiomer for skalar-multiplikasjon

(V5) $(ab)\cdot\mathbf{u}=a\cdot(b\cdot\mathbf{u})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og alle skalarer a og b.
(Skalarmultiplikasjon er *kompatibel* med multiplikasjon av skalarer.)

(V6) $1\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$.
(Tallet 1 er *identitetselement* for skalarmultiplikasjon.)

(V7) $a\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, og alle skalarer a.
(Skalarmultiplikasjon er *distributiv* over addisjon av vektorer.)

(V8) $(a+b)\cdot\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$, og alle skalarer a og b.
(Skalarmultiplikasjon er *distributiv* over addisjon av skalarer.)

uten parenteser, fordi vi får samme resultat om vi legger sammen $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ først, eller legger sammen $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ først. Mer generelt betyr det at vi kan skrive alle slags lengre summer

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots \mathbf{u}_n$$

uten parenteser. På fint matematikkspråk kalles dette at addisjonen er en *assosiativ* operasjon.

Dette ser kanskje så åpenbart ut at det ikke skulle være nødvendig å gjøre noe stort nummer ut av det. Men det er likevel nødvendig å ha det med som et krav, fordi vi i utgangspunktet sier at vi kan definere vektoraddisjonen til å gjøre akkurat hva vi vil, og det er fullt mulig å definere en operasjon som ikke er slik at parenteser kan flyttes fritt.

For å gjøre det helt klart at assosiativitet ikke er noe vi kan ta for gitt, kan det være nyttig å tenke på at du kjenner godt til minst én operasjon som ikke er assosiativ, nemlig opphøyd-i-operasjonen. Med den operasjonen har det en betydning hvor vi setter parentesene, for

$$(a^b)^c \quad \text{og} \quad a^{(b^c)}$$

er ikke det samme.

Aksiom (V2) sier at rekkefølgen ikke spiller noen rolle når vi adderer vektorer:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

Det fine navnet på denne egenskapen er at addisjonen er *kommutativ*.

Aksiom (V3) sier at det skal finnes en *nullvektor*. I $\mathbb{R}^n$ er vi vant til å si at nullvektoren er vektoren som består av bare nuller. Men nå vil vi definere nullvektoren ut fra hvordan den oppfører seg med hensyn på addisjonsoperasjonen. Den definerende egenskapen for en nullvektor $\mathbf{0}$ er at det å legge til nullvektoren ikke endrer noe, altså at

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

for alle vektorer $\mathbf{u}$.

Aksiom (V4) sier at hver vektor har en *additiv invers*. Det betyr at for hver vektor $\mathbf{u}$ skal det være mulig å finne en vektor $\mathbf{v}$ slik at

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Vektoren $\mathbf{v}$ er da den additive inversen til $\mathbf{u}$, og vi kaller den for $-\mathbf{u}$.

De fire første aksiomene handler bare om addisjonsoperasjonen. De fire siste handler om skalarmultiplikasjon.

Aksiom (V5) sier at skalarmultiplikasjonen er *kompatibel* med det å gange sammen tall, i den forstand at å gange en vektor med ett og ett tall er det samme som å gange sammen tallene først og så multiplisere med vektoren:

$$(ab) \cdot \mathbf{u} = a \cdot (b \cdot \mathbf{u})$$

Aksiom (V6) sier at det å gange en vektor med tallet 1 alltid gir oss den samme vektoren tilbake:

$$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

Vi kan altså si at tallet 1 er et *identitetselement* for skalarmultiplikasjonen.

Aksiomene (V7) og (V8) sier at vi kan gange ut parenteser slik vi er vant med, både når vi har en sum av vektorer og når vi har en sum av tall:

$$a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$$
$$(a + b) \cdot \mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$$

Dette kalles at skalarmultiplikasjonen er *distributiv* over addisjon.

Definisjonen av vektorrom

De åtte aksiomene (V1)–(V8) er det vi vil kreve for at noe skal kvalifisere til å være et vektorrom. Nå er vi derfor klare for å skrive ned definisjonen av vektorrom.

Definisjon. La V være en mengde, og anta at vi har definert to operasjoner:

$$\text{addisjon av vektorer: } \mathbf{u} + \mathbf{v}$$
$$\text{skalarmultiplikasjon: } c \cdot \mathbf{u}$$

Addisjonen skal være definert for alle elementer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i V, og skalarmultiplikasjonen for alle skalarer c og alle $\mathbf{u}$ i V. Resultatet av operasjonene skal alltid være et element i V.

Dersom mengden V og de to operasjonene oppfyller vektorromsaksiomene (V1)–(V8), så sier vi at V er et *vektorrom*, og vi kaller elementene i V for *vektorer*. △

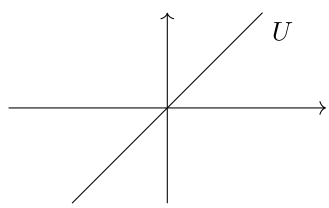
Aksiomene for vektorrom er valgt ut som de egenskapene ved $\mathbb{R}^n$ som anses som å være essensielle. Derfor er selvsagt hver $\mathbb{R}^n$ et vektorrom. Men poenget med å gi en så generell definisjon er at det også finnes flere vektorrom enn disse.

Som et første eksempel kan vi se at en delmengde av $\mathbb{R}^n$ også kan være et vektorrom.

Eksempel 8.1. Se på mengden

$$U = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

utspent av vektoren $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ i $\mathbb{R}^2$, altså denne linjen:



Hvis vi lar addisjonen og skalarmultiplikasjonen være definert som i $\mathbb{R}^2$, så kan vi sjekke at mengden U i seg selv også blir et vektorrom.

Resultatet av å addere eller skalarmultiplisere vektorer i U blir alltid en vektor i U, slik at det gir mening å definere operasjonene på denne måten.

Nullvektoren $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ i $\mathbb{R}^2$ er med i U og fungerer også som nullvektor for U, slik at aksiom (V3) er oppfylt. For alle vektorer $\mathbf{u}$ i U er også den additive inversen $-\mathbf{u}$ med i U, slik at aksiom (V4) er oppfylt. Vi ser lett at alle de andre aksiomene også holder for U, siden de holder for $\mathbb{R}^2$.

Vektorrommet U er geometrisk sett en linje, akkurat som $\mathbb{R}^1$. Det fungerer altså litt som å plassere en kopi av $\mathbb{R}^1$ på skrå inne i $\mathbb{R}^2$. △

Eksempler på vektorrom

La oss nå se på noen vektorrom som er virkelig forskjellige fra de gamle og kjente rommene $\mathbb{R}^n$. Vektorrommene vi definerer her vil vi bruke senere, så det er lurt å prøve å bli kjent med dem. For hvert av disse vektorrommene er det lett (men litt tid- og plasskrevende) å sjekke at alle vektorromsaksiomene holder. Du bør prøve å sjekke det selv, for i hvert fall ett av vektorrommene vi ser på.

Polynomer av begrenset grad. Vi skriver $\mathcal{P}_n$ for mengden av alle polynomer av grad n eller lavere, altså alle funksjoner på formen

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= \sum_{i_0}^{n} a_i x^i. \end{aligned}$$

Vi definerer addisjon og skalarmultiplikasjon av polynomer på den åpenbare måten. Hvis

$$p(x) = \sum_{i_0}^{n} a_i x^i \quad \text{og} \quad q(x) = \sum_{i_0}^{n} b_i x^i$$

er to polynomer i $\mathcal{P}_n$, så er summen $p+q$ polynomet der vi summerer koeffisientene fra p og q:

$$(p+q)(x) = \sum_{i_0}^{n} (a_i + b_i) \cdot x^i$$

Skalarmultiplikasjonen definerer vi ved at $c \cdot p$ er polynomet der vi ganger alle koeffisientene i p med c:

$$(cp)(x) = \sum_{i_0}^{n} (c \cdot a_i) \cdot x^i$$

Med disse operasjonene er $\mathcal{P}_n$ et vektorrom.

Alle polynomer. Vi skriver $\mathcal{P}$ for mengden av alle polynomer av vilkårlig grad. Med addisjon og skalarmultiplikasjon definert som i $\mathcal{P}_n$ blir $\mathcal{P}$ også et vektorrom.

Eksempel 8.2. Vi ser på tre funksjoner f, g og h, gitt ved

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, \\ g(x) &= 3x^2 + x, \\ h(x) &= x^2. \end{aligned}$$

Disse er polynomer av grad 2, så de er vektorer i vektorrommet $\mathcal{P}_2$. Dette betyr at vi kan regne med dem som vektorer – vi kan for eksempel ta lineærkombinasjoner av dem. Lineærkombinasjonen $5f + g$ blir funksjonen gitt ved

$$(5f + g)(x) = 5 \cdot f(x) + g(x) = 8x^2 + x.$$

Siden f, g og h er vektorer, kan vi også spørre om de er lineært uavhengige. Ved å prøve oss frem litt med lineærkombinasjoner av de tre vektorene, finner vi ganske raskt ut at

$$-4f + g + h = 0,$$

som betyr at f, g og h er lineært avhengige. △

Kontinuerlige funksjoner. Vi skriver $\mathcal{C}(D)$ for mengden av alle kontinuerlige funksjoner definert på et område D, der $D \subseteq \mathbb{R}$. Mengden $\mathcal{C}(D)$ består altså av alle funksjoner som er på formen

$$f\colon D \to \mathbb{R}$$

og er kontinuerlige.

Vi kan definere addisjon og skalarmultiplikasjon av funksjoner på en naturlig måte. Summen $f+g$ av to funksjoner f og g blir en funksjon gitt ved

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

og produktet cf av en skalar c og en funksjon f blir en funksjon gitt ved

$$(cf)(x) = c \cdot (f(x)).$$

Med disse operasjonene blir mengden $\mathcal{C}(D)$ et vektorrom.

Eksempel 8.3. La f og g være funksjonene gitt ved

$$f(x) = \sin x \qquad \text{og} \qquad g(x) = \cos x.$$

Da kan vi se på f og g som vektorer i vektorrommet $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ av kontinuerlige funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. Er disse to vektorene lineært uavhengige?

For å finne ut det, kan vi huske at vi vet at to vektorer er lineært uavhengige hvis og bare hvis den ene kan skrives som en skalar ganger den andre. Men siden

$$f(0) = \sin 0 = 0 \qquad \text{og} \qquad g(0) = \cos 0 = 1,$$

kan vi ikke ha at g er en skalar ganger f, for da måtte 0 ganger denne skalaren vært 1. Tilsvarende ser vi at siden

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \text{og} \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

kan vi ikke ha at f er en skalar ganger g. Altså er f og g lineært uavhengige vektorer i $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. △

Deriverbare og glatte funksjoner. Vi skriver $\mathcal{C}^1(D)$ for mengden av alle funksjoner

$$f\colon D \to \mathbb{R}$$

som er kontinuerlig deriverbare. Mer generelt skriver vi $\mathcal{C}^n(D)$ for mengden av alle funksjoner som er n ganger kontinuerlig deriverbare. Funksjoner som er deriverbare uendelig mange ganger kalles *glatte* funksjoner, og vi skriver $\mathcal{C}^\infty(D)$ for mengden av alle glatte funksjoner fra D til $\mathbb{R}$.

Med addisjon og skalarmultiplikasjon definert på samme måte som i $\mathcal{C}(D)$ blir mengdene $\mathcal{C}^n(D)$ og $\mathcal{C}^\infty(D)$ også vektorrom.

Uendelige lister. Vi skriver $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ for mengden av alle uendelige lister

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

av reelle tall. Vi definerer addisjon og skalarmultiplikasjon for slike lister ved:

$$\begin{aligned} (a_i)_{i \in \mathbb{N}} + (b_i)_{i \in \mathbb{N}} &= (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}} \\ c \cdot (a_i)_{i \in \mathbb{N}} &= (c \cdot a_i)_{i \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Da er $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et vektorrom.

Eksempel 8.4. Se på de tre vektorene

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (1, 2, 3, 4, 5, \ldots) \\ \mathbf{v} &= (1, 1, 1, 1, 1, \ldots) \\ \mathbf{w} &= (1, 3, 5, 7, 9, \ldots) \end{aligned}$$

i vektorrommet $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Er vektoren $\mathbf{w}$ en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$?

Hvis vi ganger $\mathbf{u}$ med to, så får vi:

$$2\mathbf{u} = (2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$$

Nå kan vi trekke fra $\mathbf{v}$ og ende opp med:

$$2\mathbf{u} - \mathbf{v} = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$$

Vi ser altså at $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$, så vi kan konkludere med at vektoren $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. △

Matriser. Vi skriver $\mathcal{M}_{m \times n}$ for mengden av alle $m \times n$-matriser. Vi har allerede (i kapittel 4) definert hvordan vi legger sammen matriser, og hvordan vi ganger en skalar med en matrise. Med disse operasjonene er $\mathcal{M}_{m \times n}$ et vektorrom. Siden kvadratiske matriser er spesielt interessante, definerer vi en egen notasjon, $\mathcal{M}_n$, for vektorrommet som består av alle $n \times n$-matriser.

Underrom

I eksempel 8.1 så vi at en linje i $\mathbb{R}^2$ kunne være et vektorrom i seg selv. Et slikt vektorrom som ligger inni et annet vektorrom kalles et underrom.

Definisjon. Et *underrom* av et vektorrom V er en delmengde $U \subseteq V$ som i seg selv utgjør et vektorrom, med addisjon og skalarmultiplikasjon definert på samme måte som i V. △

Eksempel 8.5. Som i eksempel 8.1 lar vi U være delmengden

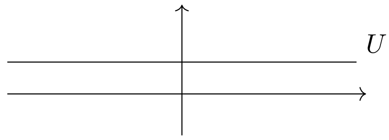
$$U = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

av $\mathbb{R}^2$. Da er U et underrom av $\mathbb{R}^2$. △

Eksempel 8.6. Se på mengden

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

av alle vektorer i $\mathbb{R}^2$ på formen $\left[\begin{smallmatrix} a \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, altså den horisontale linjen vist her:



Er U et underrom av $\mathbb{R}^2$?

Hvis U skal være et underrom, må vi ha at U i seg selv blir et vektorrom når vi bruker vektoraddisjonen og skalarmultiplikasjonen fra $\mathbb{R}^2$. Men det gir ikke fungerende operasjoner på U. For eksempel har vi at $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ og $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ er vektorer i U, men summen

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er ikke i U. Operasjonene fra $\mathbb{R}^2$ fungerer altså ikke til å gjøre U til et vektorrom, så U er ikke et underrom av $\mathbb{R}^2$. △

I eksempel 8.6 så vi at mengden U ikke ble et underrom fordi vi ikke holder oss innenfor U når vi legger sammen vektorer fra U. Vi sier da at mengden U ikke er *lukket* under addisjon.

Men hvis vi har en delmengde U av et vektorrom V som *er* lukket under både addisjon og skalarmultiplikasjon, og som inneholder nullvektoren, så blir alle vektorromsaksiomene automatisk oppfylt for U fordi de holder i V. Vi har dermed følgende teorem.

Teorem 8.7. *La V være et vektorrom. En delmgende $U \subseteq V$ er et underrom av V hvis og bare hvis følgende tre betingelser er oppfylt.*

1. *Nullvektoren $\mathbf{0}$ i V ligger i U.*
2. *For alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i U er også summen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ i U.*
3. *For alle vektorer $\mathbf{u}$ i U og alle skalarer c er også produktet $c\mathbf{u}$ i U.*

Det er lett å se at en mengde utspent av en liste med vektorer oppfyller disse tre betingelsene. Vi skriver opp det også som et teorem.

Teorem 8.8. *En mengde $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t\}$ utspent av vektorer i et vektorrom V er alltid et underrom av V.*

Bevis. Mengden $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t\}$ består av alle lineærkombinasjoner av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_t$. Uansett hva disse vektorene er, vet vi at nullvektoren er en lineærkombinasjon av dem. Videre ser vi enkelt at summen av to lineærkombinasjoner blir en ny lineærkombinasjon av de samme vektorene, og at en skalar ganger en lineærkombinasjon igjen blir en lineærkombinasjon. Dermed er alle betingelsene fra teorem 8.7 oppfylt. □

Endeligdimensjonale vektorrom

For vektorrommene $\mathbb{R}^n$ har vi et klart begrep om dimensjon. Vi sier at $\mathbb{R}^2$ er todimensjonalt, at $\mathbb{R}^3$ er tredimensjonalt, og mer generelt at $\mathbb{R}^n$ er n-dimensjonalt.

For et vilkårlig vektorrom V er det ikke like klart hva dimensjonen skal være. Vi skal etter hvert komme frem til at vi har en meningsfylt måte å snakke om dimensjon på også her, men først skal vi foreta en veldig grov inndeling av alle vektorrommene. Vi skiller mellom vektorrom som er endeligdimensjonale (og for disse skal vi om en stund se at vi kan definere en dimensjon) og de som ikke er det (for disse må vi bare nøye oss med å si at dimensjonen er uendelig).

Definisjon. Et vektorrom V er *endeligdimensjonalt* hvis det finnes en endelig mengde som utspenner V. Ellers er V *uendeligdimensjonalt.* △

Alle de «gode gamle» vektorrommene $\mathbb{R}^n$ som vi kjenner fra før er endeligdimensjonale, siden $\mathbb{R}^n$ er utspent av den endelige mengden

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

bestående av de n enhetsvektorene.

Men siden vi tar oss bryet med å definere begrepene endeligdimensjonalt og uendeligdimensjonalt, bør det også finnes eksempler på vektorrom som er uendeligdimensjonale. Flere av vektorrommene vi har sett tidligere i dette kapitlet er uendeligdimensjonale. Vi sjekker at ett av dem er uendeligdimensjonalt nå; de andre skal du få finne ut av selv i oppgavene.

Eksempel 8.9. Vektorrommet $\mathcal{P}$ av alle polynomer er uendeligdimensjonalt. Hvordan kan vi se det? La

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$$

være en endelig mengde av polynomer i $\mathcal{P}$. Hvert av polynomene p_1, p_2, …, p_t har en grad. La n være den høyeste av disse gradene. Da kan vi ikke skrive et polynom av grad $n+1$ som en lineærkombinasjon av polynomene $p_1, p_2, \ldots, p_t$, så disse utspenner ikke hele $\mathcal{P}$.

Siden vi kan si dette om enhver endelig mengde, kan det ikke finnes noen endelig mengde som utspenner $\mathcal{P}$. Dermed er $\mathcal{P}$ et uendeligdimensjonalt vektorrom. △

Basis

Vi sa at et vektorrom er endeligdimensjonalt hvis det er utspent av en endelig mengde. Nøkkelen til å definere dimensjonen til et vektorrom er å lete etter en «best mulig» utspennende mengde, der «best» betyr at den ikke inneholder noen overflødige vektorer. En slik mengde kalles en basis for vektorrommet.

Basiser er essensielle for at vi skal kunne definere dimensjonen til et vektorrom, men er også nyttige til mye annet. Et vektorrom som ikke er $\mathbb{R}^n$ kan være vanskelig å jobbe med, men om vi har en basis, blir det mye mer håndterlig.

Definisjon. En *basis* for et vektorrom V er en liste

$$\mathscr{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$$

av vektorer som både utspenner V og er lineært uavhengige. △

Merk. Det er to forskjellige måter å definere en basis på. Enten sier man at en basis er en *mengde* med vektorer, eller så sier man (som vi gjør) at en basis er en *liste* med vektorer. Forskjellen er at i en mengde har ikke elementene noen bestemt rekkefølge, mens i en liste er det ett bestemt element som er det første, ett som er det andre, og så videre.

Det viktigste med en basis er å ha vektorer som utspenner det aktuelle vektorrommet og er lineært uavhengige, og det har man uansett om man velger å plassere dem i en mengde eller en liste. Forskjellen dukker opp når man vil bruke basisen til å innføre koordinater (som vi skal gjøre ganske snart). Da må elementene i basisen ha en rekkefølge. Hvis vi hadde valgt å definere en basis som en mengde, ville vi fått litt ekstra jobb for å få definert koordinater på en skikkelig måte. △

Eksempel 8.10. La oss se på vektorrommet $\mathbb{R}^3$. Vi ser lett at listen

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

bestående av de tre enhetsvektorene er en basis. Men vi kan også finne andre basiser. Enhver liste med tre lineært uavhengige vektorer blir en basis for $\mathbb{R}^3$ (du husker fra teorem 5.12 at tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis de utspenner $\mathbb{R}^3$). Så for eksempel er listen

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} \right)$$

også en basis for $\mathbb{R}^3$. △

Vi ser at vi alltid kan bruke enhetsvektorene til å lage en basis for $\mathbb{R}^n$. Denne basisen,

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right),$$

kalles *standardbasisen* for $\mathbb{R}^n$.

Det som gjør $\mathbb{R}^n$ lettere å jobbe med enn andre vektorrom er at vi har *koordinater.* Enhver vektor i $\mathbb{R}^n$ er en kolonnevektor

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

der v_1 er vektorens første koordinat, v_2 er dens andre koordinat, og så videre. En av de viktigste egenskapene til en basis er at den lar oss innføre koordinater.

Teorem 8.11. *La V være et vektorrom med basis*

$$\mathscr{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n).$$

Da kan hver vektor $\mathbf{v}$ i V skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$$

av basisvektorene i $\mathscr{B}$, på en entydig måte.

Bevis. Det at hver vektor $\mathbf{v}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av basisvektorene følger av at basisvektorene utspenner V. Det at denne lineærkombinasjonen er entydig følger av at basisvektorene er lineært uavhengige. □

Definisjon. Tallene $c_1, c_2, \ldots, c_n$ i teorem 8.11 kalles *koordinatene* til vektoren $\mathbf{v}$ *med hensyn på* basisen $\mathscr{B}$. Vi definerer notasjonen $[\,\mathbf{v}\,]_{\mathscr{B}}$ for vektoren i $\mathbb{R}^n$ som består av koordinatene til $\mathbf{v}$:

$$[\,\mathbf{v}\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$ △

Eksempel 8.12. I eksempel 8.3 så vi at funksjonene sin og cos er lineært uavhengige vektorer i vektorrommet $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ av kontinuerlige funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. Det betyr at hvis vi ser på underrommet

$$U = \mathrm{Sp}\{\sin, \cos\}$$

av $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ utspent av disse to funksjonene, så er

$$\mathscr{B} = (\sin, \cos)$$

en basis for U. La oss nå se på en vektor i U, for eksempel funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 4 \sin x - 7 \cos x.$$

Koordinatene til f med hensyn på basisen $\mathscr{B}$ er 4 og -7, så koordinatvektoren til f blir vektoren

$$[\,f\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^2$. På denne måten kan vi gå fra å snakke om funksjoner i U til å snakke om vektorer i $\mathbb{R}^2$.

La oss nå se på funksjonen $2f$, som er lineærkombinasjonen

$$2f = 8 \sin - 14 \cos$$

av vektorene sin og cos. Det betyr at den har koordinatvektor

$$[\,2f\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \end{bmatrix}$$

med hensyn på basisen $\mathscr{B}$. Vi ser at å gange vektoren med 2 tilsvarer å gange koordinatvektoren med 2. △

Teorem 8.13. *La V være et vektorrom med basis $\mathscr{B}$. Koordinatene til en lineærkombinasjon av vektorer er den tilsvarende lineærkombinasjonen av koordinatene til hver vektor:*

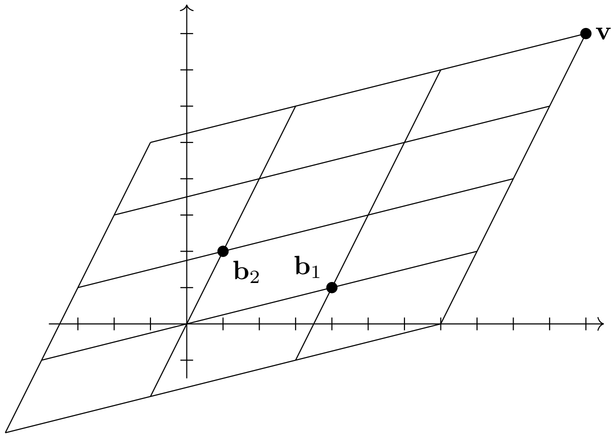
$$\begin{aligned} &[\,c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_t\mathbf{v}_t\,]_{\mathscr{B}} \\ &\quad = c_1 \cdot [\,\mathbf{v}_1\,]_{\mathscr{B}} + c_2 \cdot [\,\mathbf{v}_2\,]_{\mathscr{B}} + \cdots + c_t \cdot [\,\mathbf{v}_t\,]_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

Hvis vi ser på koordinater med hensyn på standardbasisen i $\mathbb{R}^n$, så tilsvarer det å lage et vanlig koordinatsystem. Men hvis vi ser på koordinater med hensyn på en annen basis for $\mathbb{R}^n$, så tilsvarer det å lage et «skrått» koordinatsystem.

Eksempel 8.14. Vi ser på $\mathbb{R}^2$ med basisen

$$\mathscr{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Det å bruke denne basisen for $\mathbb{R}^2$ tilsvarer å regne i et skrått koordinatsystem der $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ tar rollene som enhetsvektorer:



For eksempel har vektoren $\mathbf{v}$ på tegningen koordinater

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix}$$

med hensyn på standardbasisen, men koordinater

$$[\,\mathbf{v}\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

med hensyn på basisen $\mathscr{B}$. △

Nå har vi sett noen eksempler på hva en basis kan brukes til. Videre vil vi vise at det alltid er mulig å finne en basis, forutsatt at vektorrommet vårt er endeligdimensjonalt.

Teorem 8.15. *La V være et endeligdimensjonalt vektorrom. Da kan enhver endelig mengde som utspenner V reduseres til en basis for V. Mer presist: Hvis G er en endelig mengde av vektorer slik at $\mathrm{Sp}\, G = V$, så finnes en delmengde $B \subseteq G$ slik at vektorene i B utgjør en basis for V.*

Bevis. Det eneste som kan hindre oss fra å bare bruke vektorene i G som en basis er at de kan være lineært avhengige. Så hvis vektorene i G er lineært uavhengige, kan vi bare sette $B = G$, og vi er ferdige.

Anta nå at vektorene i G er lineært avhengige. Da finnes en vektor $\mathbf{v}$ i G som er en lineærkombinasjon av de andre. Vi lager en ny mengde

$$G_1 = G - \{\mathbf{v}\}$$

der vi har fjernet denne vektoren. Siden $\mathbf{v}$ er en lineærkombinasjon av vektorene i G_1, får vi at G_1 utspenner det samme som G, altså hele vektorrommet V.

Nå kan vi fortsette på samme måte med å fjerne ett og ett element så lenge vektorene i mengden vår er lineært avhengige. Da får vi stadig nye delmengder

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots$$

som alle utspenner hele V. Siden G er en endelig mengde, kan vi ikke fortsette slik som dette i det uendelige, og på et eller annet punkt må vi derfor få en mengde av lineært uavhengige vektorer. Disse vektorene utgjør en basis for V. □

Siden et endeligdimensjonalt vektorrom per definisjon er utspent av en endelig mengde, viser dette teoremet at det alltid finnes en basis for et slikt rom. Vi skriver dette enda tydeligere i et nytt teorem.

Teorem 8.16. *Ethvert endeligdimensjonalt vektorrom har en basis.*

Vi så over at enhver endelig mengde som utspenner et vektorrom kan reduseres til en basis. På samme måte kan enhver mengde som er lineært uavhengig utvides til en basis.

Teorem 8.17. *La V være et endeligdimensjonalt vektorrom. Enhver endelig mengde av vektorer i V som er lineært uavhengig kan utvides til en basis. Mer presist: Hvis L er en endelig mengde av vektorer som er lineært uavhengige, så finnes en basis for V som inneholder alle vektorene i L.*

Dimensjon

Nå som vi vet at alle endeligdimensjonale vektorrom har basis, kan vi bruke det til å definere dimensjonen til et vektorrom. Vi vil si at dimensjonen til et vektorrom er antall vektorer i basisen, men før vi kan si det, må vi forsikre oss om at forskjellige basiser for det samme rommet ikke kan ha forskjellig antall elementer.

Vi begynner med å generalisere et kjent resultat fra $\mathbb{R}^n$ til et vektorrom med basis. Vi husker fra teorem 5.10 at hvis vi har en liste med mer enn n vektorer i $\mathbb{R}^n$, så må vektorene i listen være lineært avhengige. Det tilsvarende utsagnet formulert med utgangspunkt i en basis sier at hvis vi har en liste med flere vektorer enn størrelsen på basisen, så må disse vektorene være lineært avhengige.

Teorem 8.18. *La V være et vektorrom med en basis $\mathscr{B}$ som består av n vektorer. La $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_m$ være m vektorer i V, der $m > n$. Da er disse vektorene lineært avhengige.*

Bevis. La

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= [\,\mathbf{v}_1\,]_{\mathscr{B}} \\ \mathbf{u}_2 &= [\,\mathbf{v}_2\,]_{\mathscr{B}} \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_m &= [\,\mathbf{v}_m\,]_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

være koordinatvektorene til vektorene vi ser på, med hensyn på basisen $\mathscr{B}$. Da er $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\ldots$, $\mathbf{u}_m$ en liste med m vektorer i $\mathbb{R}^n$, og siden $m > n$ vet vi da fra teorem 5.10 at de er lineært avhengige. Det vil si at det finnes skalarer c_1, c_2, $\ldots$, c_m (som ikke alle er 0) slik at

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots c_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}.$$

Uttrykket på venstresiden her er det samme som

$$c_1[\,\mathbf{v}_1\,]_{\mathscr{B}} + c_2[\,\mathbf{v}_2\,]_{\mathscr{B}} + \cdots + c_m[\,\mathbf{v}_m\,]_{\mathscr{B}},$$

og ved teorem 8.13 er dette igjen det samme som

$$[\,c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots c_m\mathbf{v}_m\,]_{\mathscr{B}}.$$

Vi har altså at

$$[\,c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots c_m\mathbf{v}_m\,]_{\mathscr{B}} = \mathbf{0},$$

og dermed må vi ha

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0},$$

Dette betyr at vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_m$ er lineært avhengige. □

Ved hjelp av dette teoremet ser vi at alle basiser for samme vektorrom må ha like mange elementer.

Teorem 8.19. *La V være et endeligdimensjonalt vektorrom. Da har enhver basis for V samme størrelse.*

Bevis. Anta at vi har to basiser

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_1 &= (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) \\ \mathscr{B}_2 &= (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m) \end{aligned}$$

for V. Hvis $m > n$, så sier teorem 8.18 at vektorene

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_m$$

er lineært avhengige, men det kan de ikke være siden $\mathscr{B}_2$ er en basis. Det er altså ikke mulig at $m > n$. På samme måte viser vi at det ikke er mulig at $n > m$. Da er det bare én mulighet igjen, nemlig at $m = n$, altså at basisene har samme størrelse. □

Nå som vi vet at alle basiser for samme vektorrom har samme størrelse, kan vi trygt definere dimensjonen til et vektorrom som størrelsen til en hvilken som helst basis for vektorrommet.

Definisjon. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom. Vi definerer *dimensjonen* til V som antall vektorer i en basis for V. Vi bruker notasjonen $\dim V$ for dimensjonen til V. Hvis $\mathscr{B}$ er en basis for V, har vi altså

$$\dim V = |\mathscr{B}|.$$ △

Det er en enkel og grei sammenheng mellom dimensjon og underrom: Et underrom kan aldri ha større dimensjon enn vektorrommet det er underrom av. Vi formulerer dette som et teorem.

Teorem 8.20. *La V være et vektorrom med et underrom U. Hvis V er endeligdimensjonalt, så er U også endeligdimensjonalt, og*

$$\dim U \leq \dim V.$$

Vektorrom tilknyttet en matrise

Hittil i dette kapitlet har vi vært veldig generelle og abstrakte, og ting har kanskje blitt litt høytflyvende. Vi avslutter kapitlet med noe litt mer håndfast, der vi ikke trenger å tenke på helt generelle vektorrom, men bare på underrom av $\mathbb{R}^n$.

Hvis A er en $m \times n$-matrise, så er det visse underrom av $\mathbb{R}^n$ og av $\mathbb{R}^m$ som er nært knyttet til A, og det er noen interessante sammenhenger mellom disse rommene.

Nullrommet. Vi definerer *nullrommet* til en $m \times n$-matrise A som løsningsmengden til likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, altså delmengden

$$\operatorname{Null} A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

av $\mathbb{R}^n$. I utgangspunktet er dette bare en mengde av vektorer i $\mathbb{R}^n$, men vi kan raskt finne ut at det faktisk er et underrom ved å sjekke at det oppfyller de tre kriteriene i teorem 8.7:

1. Vi ser at nullvektoren er i $\operatorname{Null} A$, siden den er en løsning av likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. Hvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er vektorer i $\operatorname{Null} A$, så har vi at $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ og $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Da får vi
$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$
som betyr at summen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ også er i $\operatorname{Null} A$.
3. Hvis $\mathbf{u}$ er i $\operatorname{Null} A$ og c er en skalar, så får vi
$$A \cdot (c \cdot \mathbf{u}) = c \cdot (A\mathbf{u}) = c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0},$$
slik at $c \cdot \mathbf{u}$ også er i $\operatorname{Null} A$.

Kolonnerommet. Vi definerer *kolonnerommet* til en $m \times n$-matrise

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

som underrommet av $\mathbb{R}^m$ utspent av kolonnene i A:

$$\operatorname{Col} A = \operatorname{Sp}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$$

Kolonnerommet til A består altså av alle lineærkombinasjoner av kolonnene i A. Siden et produkt $A\mathbf{v}$ av matrisen A og en vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ er definert til å være nettopp en lineærkombinasjon av kolonnene i A, kan vi også beskrive kolonnerommet som alle vektorer som er på formen $A\mathbf{v}$:

$$\operatorname{Col} A = \{A\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$$

Radrommet. Vi definerer *radrommet* til en $m \times n$-matrise

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^\top \\ \mathbf{r}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^\top \end{bmatrix}$$

som underrommet av $\mathbb{R}^n$ utspent av radene i A:

$$\operatorname{Row} A = \operatorname{Sp}\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}$$

Radrommet til A består altså av alle lineærkombinasjoner av radene i A (der vi ser på radene som kolonnevektorer). Dette er det samme som kolonnerommet til den transponerte matrisen:

$$\operatorname{Row} A = \operatorname{Col} A^\top$$

Vi tar nå et ganske langt eksempel der vi ser på hva vi kan si om nullrommet, kolonnerommet og radrommet til en matrise.

Eksempel 8.21. La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 15 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi vil prøve å beskrive nullrommet, kolonnerommet og radrommet til A.

For å finne nullrommet, må vi løse likningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Det gjør vi ved å gausseliminere matrisen A. Da får vi (her er mellomregningen utelatt):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 15 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får tre frie variabler, og den generelle løsningen blir:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Dette betyr at de tre vektorene

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

utspenner nullrommet til A. De er dessuten lineært uavhengige: Legg merke til at i posisjon to, fire og fem – som tilsvarer de tre frie variablene – har én av vektorene tallet 1 og de andre to tallet 0. Dermed ser vi lett at ingen av dem kan være en lineærkombinasjon av de to andre, slik at de må være lineært uavhengige. Dette betyr at

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

er en basis for nullrommet $\operatorname{Null} A$.

Når det gjelder kolonnerommet og radrommet, har vi direkte fra definisjonene at dissee rommene kan beskrives slik:

$$\operatorname{Col} A = \operatorname{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{Row} A = \operatorname{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Men her har vi bare en utspennende mengde for hvert av rommene. Den beste måten å beskrive et vektorrom på er å gi en basis. Det viser seg at vi kan finne basiser for kolonnerommet og radrommet til A ved å se på hva som skjer når vi gausseliminerer A.

La oss ta kolonnerommet først. Se på trappeformmatrisen vi endte opp med. Den har pivotelementer i første og tredje kolonne. Hvis vi stokker om på kolonnene i A slik at første og tredje kolonne kommer først, og gjør det samme med trappeformmatrisen, så blir disse matrisene også radekvivalente (fordi dette tilsvarer at vi bytter om kolonnene på samme måte i hver matrise vi får underveis i gausselimineringen):

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 15 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La oss nå lage en matrise

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

av første og tredje kolonne i A (de to kolonnene som ender opp med pivotelementer i trappeformmatrisen), og la oss kalle de tre andre kolonnene i A for

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \; \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}, \; \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Matrisen vi fikk ved å stokke om kolonnene i A kan da beskrives som

$$\left[\begin{array}{c|ccc} C & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{array}\right].$$

Vi ser fra trappeformmatrisen at kolonnene i C er lineært uavhengige, og at systemene

$$C\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \quad C\mathbf{x} = \mathbf{b}_2 \quad \text{og} \quad C\mathbf{x} = \mathbf{b}_3$$

har løsninger, slik at hver av vektorene $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ og $\mathbf{b}_3$ er en lineærkombinasjon av kolonnene i C. Dette betyr at

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$$

er en basis for kolonnerommet $\operatorname{Col} A$.

Det er litt enklere å se hvordan gausseliminasjonen gir oss en basis for radrommet. Vi kan se at hvis to matriser er radekvivalente, så har de samme radrom. Når vi utfører en radoperasjon er det nemlig slik at alle rader i den nye matrisen er lineærkombinasjoner av radene i den gamle matrisen (dette kan du ganske enkelt sjekke selv). Dessuten kan vi alltid finne en ≪omvendt≫ radoperasjon som tar oss tilbake til den gamle matrisen, slik at alle rader i den gamle matrisen er lineærkombinasjoner av radene i den nye. Altså har matrisene samme radrom.

Dette betyr at for å beskrive radrommet til A kan vi like godt se på trappeformmatrisen vi fikk ved å gausseliminere A. Der ser vi lett at alle radene som ikke er nullrader må være lineært uavhengige. Vi får dermed at

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

er en basis for radrommet $\operatorname{Row} A$. △

Metodene vi brukte i eksempelet for å finne basiser for nullrommet, kolonnerommet og radrommet fungerer generelt for en hvilken som helst matrise. Vi ser dermed at vi kan beskrive dimensjonene til disse tre rommene ved hjelp av antall frie variabler og antall pivotelementer i trappeformmatrisen.

Teorem 8.22. *La A være en $m \times n$-matrise, og la E være trappeformmatrisen vi får når vi gausseliminerer A. Da har vi:*

(a) Dimensjonen til nullrommet til A er lik antall frie variabler vi får når vi løser likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, altså antall kolonner uten pivotelement i E.

(b) Dimensjonen til kolonnerommet til A er lik antall kolonner med pivotelementer i E.

(c) Dimensjonen til radrommet til A er lik antall rader som ikke er null i E.

Siden det er ett pivotelement i hver rad som ikke er null, får vi ved å kombinere del (b) og (c) i dette teoremet at kolonnerommet og radrommet har samme dimensjon. Vi skriver opp dette også som et teorem.

Teorem 8.23. *La A være en $m \times n$-matrise. Da har kolonnerommet og radrommet til A samme dimensjon:*

$$\dim \operatorname{Col} A = \dim \operatorname{Row} A$$

Dette ene tallet, som både er dimensjonen til kolonnerommet og dimensjonen til radrommet, kalles *rangen* til matrisen. Vi skriver:

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col} A = \dim \operatorname{Row} A$$

Siden enhver kolonne i trappeformmatrisen enten inneholder et pivotelement eller gir opphav til en fri variabel for likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, får vi følgende resultat ved å kombinere del (a) og (b) fra teorem 8.22.

Teorem 8.24. *La A være en $m \times n$-matrise. Da er*

$$\dim \operatorname{Null} A + \operatorname{rank} A = n.$$

Oppgaver

1. La A og B være følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Finn en basis for kolonnerommet, nullrommet og radrommet til A, og finn dimensjonen til hvert av disse rommene.

b) Gjør det samme for matrisen B.

c) Ligger vektoren $(0, 1, -2, 3, -1, -1, 1)$ i nullrommet til A?

d) Ligger vektoren $(-1, -1, -1, -1)$ i kolonnerommet til A? Ligger den i kolonnerommet til B?

2.

a) Finn en basis for $\mathcal{P}_2$. Vis at det faktisk er en basis.

b) Hva er koordinatene til $1 + 2x + 3x^2$ i basisen du fant for $\mathcal{P}_2$?

c) Finn en basis for $\mathcal{P}_n$, der $n \geq 0$.

3. La $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Se på planet i $\mathbb{R}^3$ som består av alle vektorer på formen

$$\mathbf{u} + s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2$$

der s og t er vilkårlige tall. Er dette planet et underrom av $\mathbb{R}^3$?

b) Er planet som består av alle vektorer på formen

$$\mathbf{v} + s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2$$

et underrom av $\mathbb{R}^3$?

c) La $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$ være matrisen som har $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ som kolonner. Ligger vektoren $\mathbf{u}$ i kolonnerommet til denne matrisen? Hva med $\mathbf{v}$? Sammenlign med det du fant ut i del **a)** og **b)**.

4. La A være en $m \times n$-matrise hvor $m < n$. Hvilke av følgende påstander kan vi da konkludere med?

a) $\dim \operatorname{Col} A > 0$

b) $\dim \operatorname{Null} A > 0$

5. La V være et vektorrom, og la U_1 og U_2 være to underrom av V. Hvilke av følgende påstander kan vi da konkludere med?

a) Snittet $U_1 \cap U_2$ er et underrom av V.

b) Unionen $U_1 \cup U_2$ er et underrom av V.

6.

a) Finn en basis for vektorrommet $\mathcal{M}_{m \times n}$. Hva er dimensjonen?

b) Se på følgende delmengder av $\mathcal{M}_n$:

U: alle diagonalmatriser

V: alle inverterbare matriser

W: alle matriser A slik at $A = A^\top$

Hvilke av disse mengdene er underrom av $\mathcal{M}_n$?

c) For de mengdene i del **b)** som er underrom, hva er dimensjonen?

7.

a) Forklar hvilke av vektorrommene

$\mathcal{P}_n$ (for forskjellige n)

$\mathcal{P}$

$\mathcal{C}(\mathbb{R})$

$\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ (for forskjellige n)

$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

som er underrom av hverandre.

b) Hvilke av vektorrommene i **a)** er endeligdimensjonale? Hvilke er uendeligdimensjonale?

8. La

$$V = \left\{ \boxed{r} \;\middle|\; r \in \mathbb{R} \text{ og } r > 0 \right\}$$

være mengden der hvert element er en boks som inneholder et positivt reelt tall, slik at for eksempel

$$\boxed{5}, \quad \boxed{\tfrac{3}{4}}, \quad \boxed{\pi} \quad \text{og} \quad \boxed{9328}$$

er elementer i V. Definer vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon for V slik:

$$\boxed{r} + \boxed{s} = \boxed{rs}$$
$$c \cdot \boxed{r} = \boxed{r^c}$$

Er V et vektorrom?

9. Vi skriver

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

for mengden av heltall.

a) Hvis vi tenker på elementene i vektorrommet $\mathbb{R}^1$ som bare tall, kan vi se på $\mathbb{Z}$ som en delmengde av $\mathbb{R}^1$. Er $\mathbb{Z}$ et underrom av $\mathbb{R}^1$?

b) Nå prøver vi å gjøre $\mathbb{Z}$ til et vektorrom ved å definere vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon direkte. Definer vektoraddisjon som vanlig addisjon av tall, og definer skalarmultiplikasjon av et reelt tall r og et heltall n ved

$$r * n = \lfloor rn \rfloor,$$

der uttrykket $\lfloor rn \rfloor$ betyr tallet rn rundet ned til et heltall. (Vi bruker symbolet $*$ for skalarmultiplikasjonen her for å ikke blande den sammen med vanlig multiplikasjon av tall.)

Er $\mathbb{Z}$ – med disse operasjonene – et vektorrom?

10. Hvis V er et vektorrom som er en endelig mengde, hva kan du da si om antall elementer i V?
Hint: Kan V ha null elementer? Ett element? To elementer? Flere enn to?

11. La λ være en egenverdi til en $n \times n$-matrise A. Vis at egenrommet til λ er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

12. La mengden D være det åpne intervallet mellom $-\pi/2$ og $\pi/2$:

$$D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Se på funksjonene sin, cos og tan som vektorer i $\mathcal{C}(D)$.

a) Er de lineært uavhengige?

b) Kan du få et annet svar ved å isteden se på dem som vektorer i $\mathcal{C}(E)$, der E er en delmengde av D?

13. La V være et vektorrom. Vis at følgende påstander følger fra vektorromsaksiomene.

a) Det additive identitetselementet er entydig. Det finnes altså nøyaktig én vektor $\mathbf{0}$ i V som er slik at $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$.

b) Hvis $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ for tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ i V, så følger det at $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

c) Additive inverser er entydige. For hver vektor $\mathbf{u}$ i V finnes det altså kun én vektor $-\mathbf{u}$ i V som er slik at $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

14. Utfordring
Vi har kun definert hva en basis er for endeligdimensjonale vektorrom. For å definere en basis til et uendeligdimensjonalt vektorrom, må vi først forstå hva i) spenne ut og ii) lineær uavhengighet skal bety for uendelige mengder.

Hvis S er en uendelig mengde av vektorer i et vektorrom V, så definerer vi følgende:
i) Vi sier at S *spenner ut* V dersom enhver vektor $\mathbf{v}$ i V kan skrives som en lineærkombinasjon av et endelig antall vektorer i S.
ii) Vi sier at S er *lineært uavhengig* dersom enhver likning

$$x_1\mathbf{s}_1 + \ldots x_n\mathbf{s}_n = \mathbf{0}$$

(hvor $\mathbf{s}_i$-ene er vektorer i S) kun har den trivielle løsningen $x_i = 0$ for alle i.

Nå kan vi definere en basis for vilkårlige vektorrom: En delmengde $\mathscr{B}$ av et vektorrom V er en *basis* for V dersom den spenner ut V og er lineært uavhengig.

(Her definerer vi en basis som en mengde og ikke en liste, siden det blir vanskelig å ha en rekkefølge på basisvektorene når det kan være uendelig mange av dem.)

a) Foreslå en basis for det uendeligdimensjonale vektorrommet $\mathcal{P}$.

b) Vis at forslaget ditt er en basis.

9 Lineærtransformasjoner

I forrige kapittel begynte vi å formulere lineær algebra på en generell måte, ved å gi en abstrakt definisjon av vektorrom. For å beskrive sammenhenger mellom forskjellige vektorer og vektorrom trenger vi også å se på funksjoner som tar inn vektorer og gir ut vektorer. For to vektorrom V og W er vi interessert i de funksjonene fra V til W som *bevarer vektorromsstrukturen.* Slike funksjoner kaller vi lineærtransformasjoner.

Funksjoner

Siden lineærtransformasjoner er en spesiell type funksjoner, begynner vi med å ta en gjennomgang av en del generelle ting om funksjoner som vi kommer til å få bruk for. Aller først definerer vi presist hva en funksjon er for noe. En *funksjon* består av tre ting:

1. En mengde som kalles funksjonens *domene.*
2. En mengde som kalles funksjonens *kodomene.*
3. En regel som til hvert element i domenet tilordner et element i kodomenet.

Vi bruker notasjonen $f: A \to B$ for å angi at f er en funksjon med mengden A som domene og mengden B som kodomene.

(Mengdene som er tilknyttet en funksjon er også kjent under andre navn. Domenet kan også kalles *definisjonsmengden* til funksjonen, og kodomenet kan også kalles *verdimengden.*)

Fra før er du antagelig mest vant til funksjoner som har mengden $\mathbb{R}$ av reelle tall som både domene og kodomene, og der regelen for funksjonen er gitt ved et aritmetisk uttrykk. Her er et eksempel på en slik funksjon.

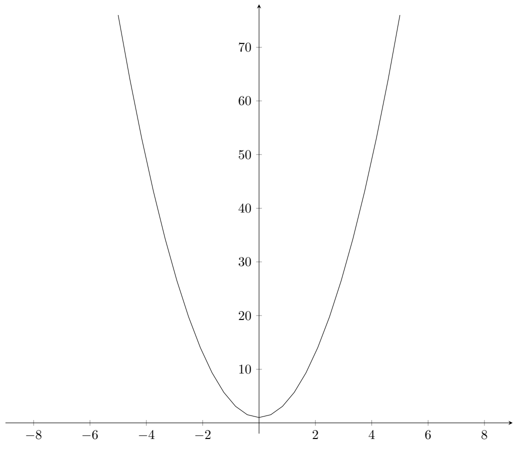
Eksempel 9.1. La $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonen definert ved

$$f(x) = 3x^2 + 1 \quad \text{for alle } x \text{ i } \mathbb{R}.$$

Da har vi for eksempel at

$$f(5) = 3 \cdot 5^2 + 1 = 76.$$

Vi kan tegne grafen til funksjonen:



△

Men det er verdt å merke seg at både domenet og kodomenet kan være hvilke som helst mengder, og regelen kan vi spesifisere akkurat slik vi vil.

Eksempel 9.2. La A være mengden bestående av de tre fruktene eple, banan og ananas, og la B være mengden bestående av heltallene 0, 1, . . . , 5:

$$A = \{\text{eple}, \text{banan}, \text{ananas}\}$$
$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Nå kan vi lage en funksjon

$$g: A \to B$$

ved å bestemme hva hvert av de tre elementene i mengden A skal sendes til. Hvis vi for eksempel bestemmer at

$$g(\text{eple}) = 4,$$
$$g(\text{banan}) = 3,$$
$$g(\text{ananas}) = 0,$$

så har vi beskrevet funksjonen g fullstendig. △

Eksempel 9.3. Vi definerer en funksjon

$$h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

ved regelen

$$h\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

△

Definisjon. La $f: A \to B$ være en funksjon.

Vi sier at f er *injektiv* (eller *en-til-en*) hvis det for hver b i B er maksimalt én a i A slik at $f(a) = b$.

Vi sier at f er *surjektiv* (eller *på*) hvis det for hver b i B finnes en a i A slik at $f(a) = b$.

Bildet til f er mengden av alle elementer i kodomenet som blir truffet av f, altså delmengden

$$\operatorname{im} f = \{ f(a) \mid a \in A \}$$

av B. △

Det følger umiddelbart fra definisjonen at en funksjon $f: A \to B$ er surjektiv hvis og bare hvis bildet til funksjonen er hele kodomenet: $\operatorname{im} f = B$.

Eksempel 9.4. Vi finner bildene til hver av funksjonene f, g og h fra eksempel 9.1–9.3, og finner ut om funksjonene er injektive og/eller surjektive.

For funksjonen f ser vi at vi kan få $f(x)$ til å bli alle tall fra 1 og oppover ved å variere x, slik at

$$\operatorname{im} f = [1, \infty).$$

Funksjonen er ikke injektiv, siden den sender flere elementer til det samme – for eksempel har vi:

$$f(1) = 4 = f(-1)$$

Funksjonen er heller ikke surjektiv, siden bildet ikke er hele kodomenet.

For funksjonen g ser vi at bildet blir mengden bestående av de tre tallene vi har valgt å sende fruktene til:

$$\operatorname{im} g = \{0, 3, 4\}$$

Funksjonen er injektiv, siden den sender alle fruktene til forskjellige tall. Den er ikke surjektiv, siden bildet ikke er hele kodomenet.

For å finne bildet til funksjonen h må vi kanskje tenke litt. Men når vi prøver oss litt frem, ser vi ganske raskt at den treffer hele $\mathbb{R}^2$, siden vi for enhver vektor $\left[\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right]$ i $\mathbb{R}^2$ får:

$$h\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Dette betyr at

$$\operatorname{im} h = \mathbb{R}^2.$$

Dermed har vi også vist at h er surjektiv. Men vi kan lett finne flere vektorer i $\mathbb{R}^3$ som h sender til samme vektor, for eksempel:

$$h\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = h\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

Dette vil si at h ikke er injektiv. △

Vi definerer to konsepter til som har med funksjoner å gjøre.

Definisjon. For enhver mengde A finnes en *identitetsfunksjon* $\mathrm{id}_A \colon A \to A$, definert ved

$$\mathrm{id}_A(a) = a \quad \text{for alle } a \text{ i } A.$$ △

Definisjon. Hvis $f \colon A \to B$ og $g \colon B \to C$ er funksjoner, så er *sammensetningen* av g og f en funksjon $g \circ f \colon A \to C$ definert ved

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$ △

Eksempel 9.5. La $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjoner definert ved:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x + 1 \\ g(x) &= x^2 + 5x \end{aligned}$$

Da er sammensetningene $f \circ g$ og $g \circ f$ også funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$, og de er gitt ved:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= \sin(x^2 + 5x) + 1 \\ (g \circ f)(x) &= (\sin x + 1)^2 + 5(\sin x + 1) \end{aligned}$$ △

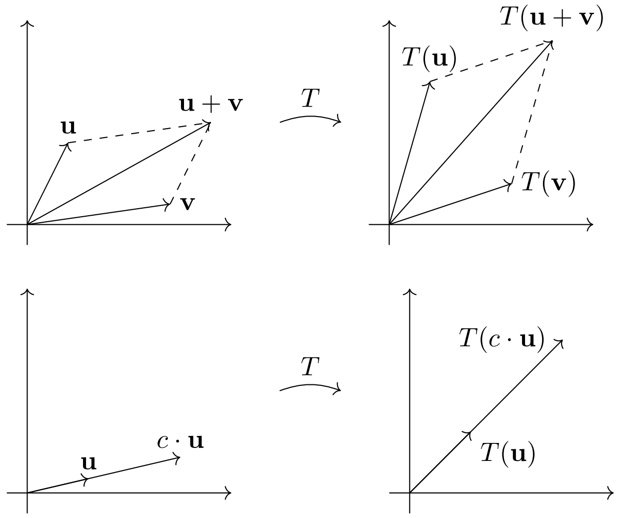
Definisjon av lineærtransformasjoner

Nå som vi har det grunnleggende om funksjoner på plass, går vi videre til å definere lineærtransformasjoner. En lineærtransformasjon er en funksjon mellom vektorrom som bevarer vektorromsstrukturen. Det vil si at vi kan utføre addisjon eller skalarmultiplikasjon før vi anvender funksjonen eller etterpå, og resultatet skal bli det samme. Vi gjør dette presist i følgende definisjon.

Definisjon. La V og W være vektorrom. En funksjon $T \colon V \to W$ er en *lineærtransformasjon* hvis den oppfyller følgende to kriterier:

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i V.
2. $T(c\mathbf{u}) = c \cdot T(\mathbf{u})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ i V og alle skalarer c. △

Vi kan illustrere de to kravene til en lineærtransformasjon slik:



Lineærtransformasjonen T bevarer addisjon og skalarmultiplikasjon

Eksempel 9.6. Vi definerer $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ved:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$$

La oss nå sjekke om denne funksjonen er en lineærtransformasjon. Vi regner ut:

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2(u_3 + v_3) \\ (u_1 + v_1) - 3(u_2 + v_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2u_3 \\ u_1 - 3u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2v_3 \\ v_1 - 3v_2 \end{bmatrix} \\ &= T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Funksjonen T oppfyller altså kravet om å bevare addisjon. Vi sjekker at den også oppfyller kravet om å bevare skalarmultiplikasjon:

$$\begin{aligned} T\left(c \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 2(cu_3) \\ cu_1 - 3(cu_2) \end{bmatrix} \\ = c\begin{bmatrix} 2u_3 \\ u_1 - 3u_2 \end{bmatrix} &= c \cdot T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Vi har nå sjekket at funksjonen T oppfyller begge kravene i definisjonen, så den er en lineærtransformasjon. △

Eksempel 9.7. Vi definerer $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ved:

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_1 + 2x_2\\x_1 + 1\end{bmatrix}$$

Nå kan vi for eksempel legge merke til at

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}, \quad \text{men} \quad T\left(2 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}.$$

Vi har altså

$$T\left(2 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) \neq 2 \cdot T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right),$$

så T er ikke en lineærtransformasjon. △

Her er noen egenskaper ved lineærtransformasjoner som følger ganske enkelt fra definisjonen, kombinert med aksiomene for vektorrom:

Teorem 9.8. *Hvis $T\colon V \to W$ er en lineærtransformasjon, så oppfyller den følgende.*

(a) En lineærkombinasjon i V sendes til den tilsvarende lineærkombinasjonen i W:

$$\begin{aligned} &T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r)\\ &\quad = c_1 \cdot T(\mathbf{v}_1) + c_2 \cdot T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_2 \cdot T(\mathbf{v}_r)\end{aligned}$$

(b) Nullvektoren i V sendes til nullvektoren i W:

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Eksempel 9.9. Anta at $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er en lineærtransformasjon slik at

$$T\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}.$$

Kan vi ut fra dette finne ut hva

$$T\left(\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}\right)$$

må være? Vi ser at vi kan skrive $\left[\begin{smallmatrix}8\\2\end{smallmatrix}\right]$ som en lineærkombinasjon av $\left[\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right]$ og $\left[\begin{smallmatrix}0\\5\end{smallmatrix}\right]$:

$$\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$$

Ved å bruke teorem 9.8 (a) får vi nå:

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}\right) &= T\left(4 \cdot \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right)\\ &= 4 \cdot T\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) - 2 \cdot T\left(\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right)\\ &= 4 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Mer generelt kan vi se at siden de to vektorene

$$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$$

utspenner $\mathbb{R}^2$, er det nok å vite hva T gjør med hver av disse for å vite hva den gjør med en hvilken som helst vektor. △

Nå har vi sett noen eksempler på lineærtransformasjon mellom vektorrom på formen $\mathbb{R}^n$. Vi tar med ett eksempel på en lineærtransformasjon der domenet er et litt annerledes vektorrom.

Eksempel 9.10. Vi husker fra forrige kapittel at $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ er vektorrommet som består av alle kontinuerlige funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. La $T\colon \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ være funksjonen gitt ved:

$$T(f) = \begin{bmatrix}f(0)\\f(1)\end{bmatrix}$$

Hvis vi for eksempel ser på en funksjon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ gitt ved

$$f(x) = 3x^2 + 1,$$

så har vi:

$$T(f) = \begin{bmatrix}f(0)\\f(1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$$

Vi sjekker at T er en lineærtransformasjon:

$$\begin{aligned} T(f+g) &= \begin{bmatrix}(f+g)(0)\\(f+g)(1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f(0)+g(0)\\f(1)+g(1)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}f(0)\\f(1)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}g(0)\\g(1)\end{bmatrix} = T(f) + T(g)\end{aligned}$$

$$T(cf) = \begin{bmatrix}(cf)(0)\\(cf)(1)\end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix}f(0)\\f(1)\end{bmatrix} = c \cdot T(f)$$

Vi kan observere at for enhver vektor $\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right]$ i $\mathbb{R}^2$ kan vi definere en funksjon f i $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ ved

$$f(x) = (b-a)x + a,$$

og da får vi:

$$T(f) = \begin{bmatrix}f(0)\\f(1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

Dette betyr at funksjonen T treffer alle vektorene i $\mathbb{R}^2$, slik at $\operatorname{im} T = \mathbb{R}^2$, og T er surjektiv.

Men T er ikke injektiv: Vi kan for eksempel se på to funksjoner f og g i $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ gitt ved:

$$f(x) = 0 \quad \text{og} \quad g(x) = x^2 - x$$

Da har vi at

$$T(f) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = T(g),$$

men $f \neq g$, så T er ikke injektiv. △

Kjerne og bilde

For enhver funksjon $f\colon A \to B$ har vi definert bildet $\operatorname{im} f$, som er delmengden av kodomenet B bestående av alle elementer funksjonen treffer. For en lineærtransformasjon har vi også en delmengde av domenet som det er naturlig å knytte til lineærtransformasjonen, nemlig mengden av alle vektorer som sendes til nullvektoren.

Definisjon. La $T\colon V \to W$ være en lineærtransformasjon. *Kjernen* til T er mengden av alle vektorer i V som blir sendt til nullvektoren i W:

$$\ker T = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$ △

Eksempel 9.11. La $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen gitt ved:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

Vi vil finne kjernen og bildet til T.

Vi ser at en vektor $\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$ blir sendt til nullvektoren hvis og bare hvis de to komponentene x_1 og x_2 er samme tall, så kjernen blir mengden

$$\ker T = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Siden

$$x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2),$$

ser vi at alle vektorer vi når ved å anvende T må være på formen

$$\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}.$$

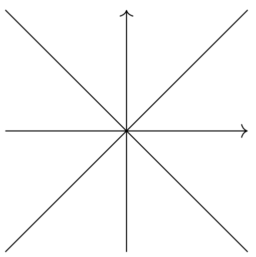
Vi ser dessuten at vi kan nå alle slike vektorer, siden vi for hvert tall a har at

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}.$$

Det betyr at

$$\operatorname{im} T = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vi har altså at både kjernen og bildet er rette linjer i $\mathbb{R}^2$:



Spesielt betyr dette at både bildet og kjernen er underrom av $\mathbb{R}^2$. △

I eksempelet hadde vi en lineærtransformasjon med $\mathbb{R}^2$ som både domene og kodomene, og vi så at både bildet og kjernen ble underrom av $\mathbb{R}^2$. Dette var ingen tilfeldighet, for vi kan vise generelt at kjernen til en lineærtransformasjon alltid må være et underrom av domenet, og bildet alltid et underrom av kodomenet.

Teorem 9.12. *La $T\colon V \to W$ være en lineærtransformasjon.*

(a) Kjernen $\ker T$ er et underrom av V.

(b) Bildet $\operatorname{im} T$ er et underrom av W.

Vi vet at en lineærtransformasjon $T\colon V \to W$ er surjektiv hvis og bare hvis $\operatorname{im} T = W$ (dette holder generelt for alle funksjoner, ikke bare lineærtransformasjoner). Vi skal nå se at det på samme måte er en nær sammenheng mellom kjernen til T og hvorvidt T er injektiv.

Hvis T er injektiv, så er det maksimalt én vektor i V som T sender til nullvektoren i W. Men vi vet jo at T må sende nullvektoren i V til nullvektoren i W. Dermed får vi at $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. Vi kan også vise at den motsatte implikasjonen holder, og da får vi følgende teorem.

Teorem 9.13. *En lineærtransformasjon $T\colon V \to W$ er injektiv hvis og bare hvis $\ker T = \{\mathbf{0}\}$.*

Bevis. Vi har allerede vist at hvis T er injektiv, så er $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. Da gjenstår det å vise at hvis $\ker T = \{\mathbf{0}\}$, så er T injektiv.

Vi antar derfor at $\ker T = \{\mathbf{0}\}$, og vi ser på to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i V som er slik at

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}).$$

Vi vil vise at dette medfører at $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ må være den samme vektoren. Vi kan flytte over $T(\mathbf{v})$ til venstre side og få:

$$T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

Men $T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$ er det samme som $T(\mathbf{u} - \mathbf{v})$, siden T er en lineærtransformasjon. Dermed har vi

$$T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0},$$

som betyr at $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ligger i kjernen til T. Antagelsen vi startet med var at den eneste vektoren i kjernen til T er nullvektoren, så dette vil si at

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

altså at $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Vi har altså vist at hvis $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$, så er $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, og det vil si at T er injektiv. □

Dette teoremet forteller oss at det er lettere å finne ut om en lineærtransformasjon T er injektiv enn om en vilkårlig funksjon er injektiv. Det eneste vi trenger å sjekke er hva kjernen er, altså hvilke vektorer T sender til nullvektoren.

Lineærtransformasjoner gitt ved matriser

La A være en $m \times n$-matrise. Da kan vi definere en funksjon $T\colon \mathbb{R}^n \to R^m$ ved

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Dette blir en lineærtransformasjon, siden vi (ved å bruke regneregler for matriser) får at

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= A \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \\ T(c\mathbf{u}) &= A \cdot (c\mathbf{u}) = c \cdot (A\mathbf{u}) = c \cdot T(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

for alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i V, og alle skalarer c.

Eksempel 9.14. La A være 3×2-matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix},$$

og definer en lineærtransformasjon $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ved

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Det å spesifisere T på denne måten gjør at vi kan besvare spørsmål om T ved å benytte regneteknikkene vi kjenner for matriser.

Hvis vi for eksempel lurer på hva $T(\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right])$ blir, så er det bare å regne ut:

$$T(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Hvis vi lurer på om det finnes noen vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$ slik at

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix},$$

så er det bare å løse likningssystemet

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

på vanlig måte med gausseliminasjon. Svaret blir ja, det finnes en slik $\mathbf{x}$, nemlig

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

Som vi så i eksempelet, kan vi alltid få til å besvare spørsmål av typen «hva er $T(\mathbf{v})$?» og «finnes det noen x slik at $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$?» når lineærtransformasjonen T er definert ved en matrise A. Vi kan også bruke matrisen til å regne ut kjernen og bildet til T.

Kjernen $\ker T$ er definert som mengden av alle vektorer $\mathbf{v}$ slik at $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Men når $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x}$, blir dette det samme som mengden av alle vektorer $\mathbf{v}$ slik at $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, og det er nullrommet til A. Vi får altså at $\ker T = \operatorname{Null} A$.

Bildet $\operatorname{im} T$ er alle vektorer som kan skrives som $T(\mathbf{v})$. Når $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, blir dette det samme som alle vektorer som kan skrives som $A\mathbf{v}$. Det er det samme som alle lineærkombinasjoner av kolonnene i A, altså kolonnerommet til A. Vi får altså at $\operatorname{im} T = \operatorname{Col} A$.

Vi oppsummerer det vi har vist nå i et teorem.

Teorem 9.15. *La A være en $m \times n$-matrise, og la $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være lineærtransformasjonen gitt ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Da er*

$$\ker T = \operatorname{Null} A \qquad \textit{og} \qquad \operatorname{im} T = \operatorname{Col} A.$$

Det er altså mange grunner til at det er fordelaktig å ha lineærtransformasjonene våre gitt ved matriser. Hvis vi har en lineærtransformasjon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ som ikke er gitt ved en matrise, kan det derfor være nyttig å prøve å finne en matrise A slik at $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle vektorer $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$. I det neste eksempelet gjør vi nettopp dette.

Eksempel 9.16. La $\mathbf{e}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ og $\mathbf{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ være enhetsvektorene i $\mathbb{R}^2$, og la $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være en lineærtransformasjon slik at

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Basert på dette kan vi finne ut hva $T(\mathbf{x})$ er for en vilkårlig vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$. Vi kan nemlig skrive

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2,$$

og da får vi:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) &= x_1 \cdot T(\mathbf{e}_1) + x_2 \cdot T(\mathbf{e}_2) \\ &= x_1 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

Her har vi endt opp med å skrive lineærtransformasjonen ved hjelp av en matrise. La A være denne matrisen:

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Da har vi altså at $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle vektorer $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$. $\triangle$

På samme måte som i dette eksempelet kan vi skrive enhver lineærtransformasjon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ på matriseform ved å lage en matrise av vektorene som T sender enhetsvektorene i $\mathbb{R}^n$ til. Vi beskriver det generelle tilfellet i et teorem.

Teorem 9.17. *La $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineærtransformasjon. Da finnes en $m \times n$-matrise A slik at*

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \textit{for alle } \mathbf{x} \textit{ i } \mathbb{R}^n.$$

Matrisen A er entydig bestemt av T, og er gitt ved

$$\begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix},$$

der $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ er standardbasisen for $\mathbb{R}^n$.

Definisjon. Matrisen A i teorem 9.17 kalles *standardmatrisen* til lineærtransformasjonen T. $\triangle$

Faktisk kan vi gjøre teorem 9.17 mer generelt. Så lenge vektorrommene våre er endeligdimensjonale, kan enhver lineærtransformasjon beskrives ved en matrise. Men det krever at vi velger en basis for hvert vektorrom.

Teorem 9.18. *La V og W være endeligdimensjonale vektorrom, og la $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$ være basiser for henholdsvis V og W. La $T\colon V \to W$ være en lineærtransformasjon. Da finnes en matrise A slik at*

$$[\,T(\mathbf{x})\,]_{\mathscr{C}} = A \cdot [\,\mathbf{x}\,]_{\mathscr{B}}$$

for alle vektorer $\mathbf{x}$ i V.

Egentlig er det et valg av basis involvert i teorem 9.17 også. Der har vi valgt å bruke standardbasisene for $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^m$. For et vilkårlig vektorrom V har vi ikke nødvendigvis noen slik basis som er det åpenbare valget.

Egenverdier og egenvektorer

Vi er vant til å se på egenverdier og egenvektorer for kvadratiske matriser. Nå vet vi at en $n \times n$-matrise A gir opphav til en lineærtransformasjon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definert ved

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x},$$

og da kan vi beskrive egenverdiene og egenvektorene til A ved hjelp av denne lineærtransformasjonen. Dersom A har en egenverdi λ med tilhørende egenvektor $\mathbf{v}$, så betyr det at

$$T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}.$$

Dette kan vi generalisere til mer generelle lineærtransformasjoner.

Hvis vi har en lineærtransformasjon $T\colon V \to V$ der domenet og kodomenet er det samme vektorrommet V, så kan vi definere egenverdier og egenvektorer for T på tilsvarende måte som for matriser. Vi sier at λ er en *egenverdi* for T, og $\mathbf{v}$ en tilhørende *egenvektor*, dersom

$$T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Hvis λ er en egenverdi for T, så har λ et tilhørende *egenrom*, nemlig underrommet

$$\{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$$

av V.

Isomorfi

Til slutt i dette kapitlet ser vi på hvordan vi kan bruke lineærtransformasjoner til å beskrive at to vektorrom er «strukturelt like». Med dette mener vi at de oppfører seg på akkurat samme måte som vektorrom, selv om de kan bestå av helt forskjellige elementer. Da vil vi si at de to vektorrommene er *isomorfe.* For å kunne definere dette, trenger vi først et begrep om inverser for lineærtransformasjoner.

Definisjon. La $T\colon V \to W$ være en lineærtransformasjon. En *invers* til T er en lineærtransformasjon $S\colon W \to V$ som er slik at

$$\begin{aligned} S(T(\mathbf{v})) &= \mathbf{v} && \text{for alle } \mathbf{v} \text{ i } V\text{, og} \\ T(S(\mathbf{w})) &= \mathbf{w} && \text{for alle } \mathbf{w} \text{ i } W. \end{aligned}$$

△

Vi vil si at to vektorrom er isomorfe hvis det er mulig å bevege seg frem og tilbake mellom dem ved hjelp av lineærtransformasjoner som bevarer all informasjonen om vektorrommene. Vi vil altså ha en situasjon slik som dette, der T og S er hverandres inverser:

$$V \underset{S}{\overset{T}{\rightleftarrows}} W$$

Definisjon. Hvis $T\colon V \to W$ er en lineærtransformasjon som har en invers, så er T en *isomorfi.* Da sier vi dessuten at vektorrommene V og W er *isomorfe*, og vi skriver $V \cong W$. △

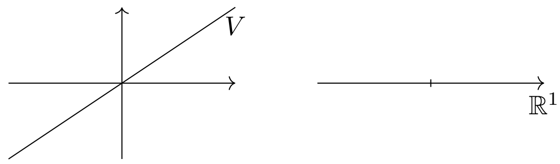
Eksempel 9.19. Vi lar V være underrommet

$$V = \operatorname{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

i $\mathbb{R}^2$ utspent av vektoren $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$. Da er V et endimensjonalt vektorrom, og geometrisk sett er det en linje. Vektorrommet V ser ut og oppfører seg akkurat som vektorrommet $\mathbb{R}^1$. Forskjellen er bare at elementene ser forskjellige ut. Hvert element i V er en vektor på formen

$$\begin{bmatrix} 3t \\ 2t \end{bmatrix}$$

mens hvert element i $\mathbb{R}^1$ er bare et tall.



De to vektorrommene V og $\mathbb{R}^1$

Det at V og $\mathbb{R}^1$ «ser like ut» kan vi gjøre mer presist ved å vise at de er isomorfe. Vi definerer lineærtransformasjoner

$$T\colon V \to \mathbb{R}^1 \quad \text{og} \quad S\colon \mathbb{R}^1 \to V$$

ved:

$$T\left(\begin{bmatrix} 3t \\ 2t \end{bmatrix}\right) = t \qquad S(x) = \begin{bmatrix} 3x \\ 2x \end{bmatrix}$$

Vi kan lett sjekke at disse faktisk er lineærtransformasjoner, og vi ser at de er hverandres inverser. Det betyr at de er isomorfier, og de viser dermed at $V \cong \mathbb{R}^1$. △

Eksempel 9.20. Vi husker at $\mathcal{P}_1$ er vektorrommet som består av alle polynomer av grad 1 eller lavere, altså alle funksjoner på formen

$$p(x) = a_1 x + a_0.$$

Polynomet p er entydig bestemt av de to tallene a_1 og a_0, og vi vet at addisjon og skalarmultiplikasjon av polynomer foregår ved å addere eller skalarmultiplisere hver koeffisient. Hvis vi bare ser på hva som skjer med koeffisientene, så ligner altså vektorrommet $\mathcal{P}_1$ veldig på $\mathbb{R}^2$.

Vi definerer to lineærtransformasjoner

$$T\colon \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{og} \quad S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$$

på følgende måte:

$$\begin{aligned} T(p) &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} && \begin{array}{l}\text{for et polynom } p \text{ definert} \\ \text{ved } p(x) = a_1 x + a_0,\end{array} \\ S\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) &= q, && \begin{array}{l}\text{der } q \text{ er polynomet definert} \\ \text{ved } q(x) = v_1 x + v_2.\end{array} \end{aligned}$$

Det er lett å sjekke at T og S er lineærtransformasjoner, og at de er hverandres inverser. Dermed er de isomorfier, og vi får at $\mathcal{P}_1 \cong \mathbb{R}^2$. △

I dette eksempelet viste vi at det todimensjonale vektorrommet $\mathcal{P}_1$ er isomorft med $\mathbb{R}^2$. På tilsvarende måte kan vi vise at ethvert todimensjonalt vektorrom er isomorft med $\mathbb{R}^2$, og mer generelt at ethvert n-dimensjonalt vektorrom er isomorft med $\mathbb{R}^n$.

Teorem 9.21. *Hvis V er n-dimensjonalt vektorrom, så er V isomorft med $\mathbb{R}^n$.*

Vi kan også merke oss at det å være en isomorfi kan beskrives ved hjelp av injektivitet og surjektivitet.

Teorem 9.22. *En lineærtransformasjon er en isomorfi hvis og bare hvis den er både injektiv og surjektiv.*

Oppgaver

1. Finn ut om funksjonen T er en lineærtransformasjon. Hvis den er det: Finn standardmatrisen til T, regn ut $\ker T$ og $\operatorname{im} T$, og finn ut om T er injektiv, og om den er surjektiv.

a) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8x - 7y \\ 3z - 8x - 7y \\ 5y - 4x - 8z \\ 6y - 6x - 4z \end{bmatrix}$

b) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$

c) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

2. Finn standardmatrisen til lineærtransformasjonen

a) … $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som speiler planet om x-aksen.

b) … $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som roterer planet med $\frac{3}{4}\pi$.

3. La S og R være som i forrige oppgave. Finn standardmatrisene til sammensetningene $S \circ R$ og $R \circ S$. Gi en geometrisk beskrivelse av hva disse lineærtransformasjonene gjør.

4.

a) Finn en basis $\mathscr{B}$ for $\mathcal{P}_2$ slik at

$$[\,p\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \frac{p''(0)}{2} \end{bmatrix}$$

er koordinatene til et andregradspolynom p.

b) Finn en basis $\mathscr{C}$ for $\mathcal{P}_2$ slik at

$$[\,p\,]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$$

er koordinatene til et andregradspolynom p.

c) La p være gitt ved $p(x) = x^2$. Finn koordinatene til p med hensyn på henholdsvis $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$.

d) Finn lineærtransformasjoner som oversetter mellom disse basisene, altså $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ og $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ slik at

$$T([\,p\,]_{\mathscr{B}}) = [\,p\,]_{\mathscr{C}} \quad \text{og} \quad S([\,p\,]_{\mathscr{C}}) = [\,p\,]_{\mathscr{B}}$$

for alle polynomer p. Sjekk at T og S gir riktig resultat for koordinatene du fant i del **c)**.

5. La $T_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen som roterer vektorer med vinkelen θ.

a) Finn standardmatrisen for T_θ.

b) Bevis den trigonometriske likningen

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta).$$

Hint: Sammenlign $T_{2\theta}$ og $T_\theta \circ T_\theta$.

6. Avgjør om følgende påstand er korrekt: En funksjon $T\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ er en lineærtransformasjon hvis og bare hvis T kan skrives på formen $T(x) = ax + b$, der a og b er konstanter.

7. Vi skriver $\operatorname{Hom}(V, W)$ for mengden av alle lineærtransformasjoner fra V til W.

a) Definer en passende addisjon og skalarmultiplikasjon på $\operatorname{Hom}(V, W)$ slik at det blir et vektorrom.

b) Vis at $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathcal{M}_{m\times n}$.

8. La $D\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ være funksjonen som sender hvert polynom til den deriverte av polynomet:

$$D(p) = p'$$

La $G\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ være funksjonen som ganger polynomet den får inn med x:

$$G(p) = q, \quad \text{der} \quad q(x) = x \cdot p(x).$$

a) Vis at D og G er lineærtransformasjoner.

b) Finn bildet og kjernen til D og til G.

c) Finn ut om D og G er injektive og/eller surjektive.

d) Beskriv lineærtransformasjonen $(D\circ G) - (G \circ D)$.

e) Nå begrenser vi oss til endeligdimensjonale polynomvektorrom. For hvert positive heltall n definerer vi lineærtransformasjoner

$$D_n\colon \mathcal{P}_n \to P_{n-1} \quad \text{og} \quad G_n\colon \mathcal{P}_{n-1} \to P_n$$

på samme måte som vi definerte D og G. Velg en passende basis for hvert av vektorrommene $\mathcal{P}_2$ og $\mathcal{P}_3$, og finn matrisene for D_3 og G_3 med hensyn på disse basisene.

9. La U, V og W være endeligdimensjonale vektorrom, og anta at vi har lineærtransformasjoner

$$U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W$$

slik at sammensetningen $S \circ T$ er en isomorfi.

a) Kan du ut fra dette konkludere med om T og S er injektive og/eller surjektive?

b) Hva kan du si om dimensjonene til U, V og W?

10. La $D\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ være funksjonen som er gitt ved derivasjon:

$$D(f) = f'$$

a) Vis at D er en lineærtransformasjon.
Hint: I Matematikk 1 lærte vi regneregler for derivasjon av i) en sum av to funksjoner og ii) en funksjon multiplisert med en konstant. Du kan bruke disse.

b) Finn kjernen $\ker D$ av lineærtransformasjonen D. Er $\ker D$ et endeligdimensjonalt vektorrom? I så fall: Finn en basis.

c) Finn alle egenverdiene til D.

d) Er D surjektiv?
Hint: Analysens fundamentalteorem.

10 Komplekse tall

Oppfinnelsen av nye tallsystemer henger gjerne sammen med polynomligninger. Ligningen

$$2x + 3 = 0$$

har ingen positiv løsning, selv om koeffisientene er positive tall. Ligningen

$$2x - 3 = 0$$

har ingen heltallig løsning, selv om koeffisientente er hele tall. Ligningen

$$x^2 - 2 = 0$$

har ingen rasjonale løsninger, og likningen

$$x^2 + 1 = 0$$

ingen reelle løsninger. Generelt er det slik at en polynomlikning

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

ikke nødvendigvis har n løsninger i det tallsystemet koeffisientene er hentet fra.

Den imaginære enheten

Ligningen

$$x^2 + 1 = 0$$

har ingen reell løsning. La oss finne opp et nytt tall. Vi kaller det i, den *den imaginære enheten*. Nå kan det være fristende å definere

$$i = \sqrt{-1},$$

og så skrive kvadratroten av negative tall på en pen måte:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{(-1)} = 2i.$$

Dette er imidlertid ikke en god strategi, for vanlige regneregler for røtter gjelder ikke for negative tall:

$$\begin{aligned} 1 &= (-1) \cdot (-1) \\ &= \sqrt{(-1) \cdot (-1)} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i^2 = -1. \end{aligned}$$

Men disse suspekte beregningene gir oss allikevel en pekepinn om hva vi ønsker å oppnå. En bedre løsning er å definere i ved ligningen

$$i^2 = -1,$$

og så får vi være enige om å si $2i$ istedet for $\sqrt{-4}$. Løser vi likningen

$$x^2 + x + 1 = 0$$

gir annengradsformelen

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

og dette inspirerer oss til å definere *komplekse tall* som

$$z = a + bi.$$

Her er a og b reelle tall. De kalles henholdsvis *realdelen* og *imaginærdelen* til z, og skrives gjerne $\operatorname{Re} z$ og $\operatorname{Im} z$. Mengden av alle komplekse tall kalles $\mathbb{C}$. Dersom $b = 0$, er z reell, og vi ser at de reelle tallene er inneholdt i de komplekse, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Operasjoner på komplekse tall

La $z = 2 + 3i$ og $w = 4 + 5i$. De kan adderes

$$z + w = 2 + 4 + (3 + 5)i = 6 + 8i,$$

subtraheres

$$z - w = 2 - 4 + (3 - 5)i = -2 - 2i,$$

og ganges

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (2 + 3i) \cdot (4 + 5i) \\ &= 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4i + 2 \cdot 5i + 3 \cdot 5i^2 \\ &= 8 - 15 + (12 + 10)i = -7 + 22i. \end{aligned}$$

De kan også deles

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{2 + 3i}{4 + 5i} \cdot \frac{4 - 5i}{4 - 5i} \\ &= \frac{8 + 15 + (12 - 10)i}{16 + 25} = \frac{22}{41} - \frac{2}{41} i. \end{aligned}$$

Hva skjedde her? La $z = a + bi$. Vi ganget oppe og nede med z *konjugert*

$$\overline{z} = a - bi.$$

Merk at $z\overline{z}$ blir et reelt tall. Det er lett å vise regneregler for $\overline{z}$, for eksempel

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \overline{z} + \overline{w}, \\ z + \overline{z} &= 2a \\ &\text{og} \\ z \cdot \overline{z} &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Det komplekse planet

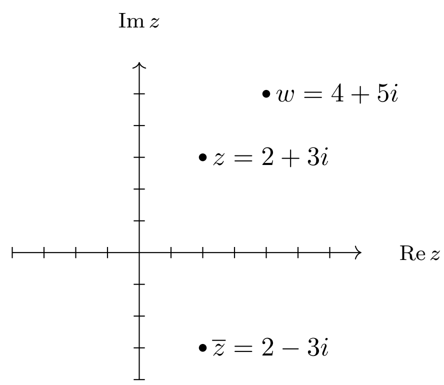
Et komplekst tall har en viss ytre likhet med vektorer i $\mathbb{R}^2$. Hvis komponentene til $\mathbf{x}$ er x_1 og x_2 og enhetsvektorer i koordinatretningene er $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$, skriver vi gjerne

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2.$$

På lignende vis kan vi tenke at realdelen a og imaginærdelen b er komponenter i en vektor

$$z = a + bi,$$

og avmerke z i *det komplekse planet.*



Det komplekse planet

Nå tenker du sikkert at det er på sin plass å sjekke om vektorromsaksiomene holder for de komplekse tallene. Det er en helt riktig ting å gjøre, $\mathbb{C}$ er et vektorrom, og de vanlige geometriske operasjonene man gjør på vektorer i $\mathbb{R}^2$, fungerer fint på komplekse tall. Komplekse tall legges sammen komponentvis akkurat som vektorer i $\mathbb{R}^2$, og bevisene for kjente og kjære sannheter, som for eksempel *trekantulikheten*

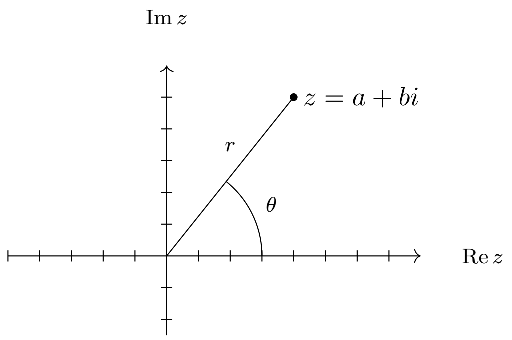
$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

er i prinsippet helt like.

Noen trigonometriske betraktninger

La r være avstanden fra z til origo i det komplekse planet, og la θ være vinkelen z gjør med den reelle aksen. Noen enkle geometriske betraktninger gir oss at

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{Re} z = r\cos\theta \\ b &= \operatorname{Im} z = r\sin\theta. \end{aligned}$$



Polare koordinater

Formlene over gir a og b som funksjon av r og θ. Litt mer trigonometri gir den andre veien

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{for } a > 0 \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi & \text{for } a < 0 \\ \pi/2 & \text{for } a = 0,\ b > 0 \\ 3\pi/2 & \text{for } a = 0,\ b < 0 \end{cases}$$

Arkustangensfunksjonen skjønner ikke av seg selv om z ligger til høyre eller venstre for den imaginære aksen, og er z imaginær blir den ihvertfall forvirret. Derav alle tilfellene. Merk også at vi kan legge til vilkårlige multipler av 2π overalt, samt at for $z = 0$ er ikke θ definert.

Vi skriver ellers

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

for avstanden fra z til origo. Dette tallet kalles gjerne *absoluttverdi* eller *modulus* til z. Vinkelen

$$\theta = \arg z$$

kalles *vinkelen* eller *argumentet* til z.

Eulers formel

Fra envariabel kalkulus husker du kanskje de tre taylorrekkene til eksponensialfunksjonen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

sinusfunksjonen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

og cosinusfunksjonen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Dersom bruker i til å skrive

$$\cos x = 1 + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}$$

og

$$i\sin x = ix + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

og legger disse to sammen, får vi

$$\cos x + i\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = e^{ix}.$$

Dette er kun en symbolsk manipulasjon, vi vet strengt tatt ikke hva som skjer med konvergensen til en taylorrekke når du ganger den med i, men vi er nok inne på noe om vi definerer

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

som kalles *Eulers formel*. Vanlige regneregler for eksponensialfunksjonen er lette å utlede herfra. For eksempel er

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i\sin(x+y) \\ &= \cos x\cos y - \sin x\sin y + i(\cos x\sin y + \sin x\cos y) \\ &= (\cos x + i\sin x)\cdot(\cos y + i\sin y) = e^{ix}e^{iy}. \end{aligned}$$

Tar vi Eulers formel for god fisk, kan vi skrive komplekse tall veldig kompakt på *polar form*:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

Eksempel 10.1. Eulers formel gir at $e^{\pi i/2} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{3\pi i/2} = -i$ og $e^{2\pi i} = 1$. △

Eksempel 10.2. Dersom $z = re^{i\theta}$ gir Eulers formel $\overline{z} = re^{-i\theta}$. △

Røtter av komplekse tall

Hvis du plukker opp en tilfeldig bok i algebra eller kompleks analyse, er det bevist følgende teorem et eller annet sted. Teoremet heter algebraens fundamentalteorem.

Teorem 10.3. *Et polynom*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

kan alltid faktoriseres

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - z_i),$$

der z_i er løsninger av likningen

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$$

Dersom en faktor $(z - z_k)$ forekommer m ganger i faktoriseringen, sier vi at z_k har multiplisitet m.

Eksempel 10.4. Polynomet

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = (z-1)^3$$

har en rot ($z = 1$) med multiplisitet 3. △

Eksempel 10.5. Polynomet

$$z^2 - 2z + 2$$

har to røtter

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i,$$

begge med multiplisitet 1. △

Vi skal ikke bevise algebraens fundamentalteorem, men et spesialtilfelle kan vi analysere med det vi kjenner til så langt, nemlig løsninger av polynomlikningen

$$z^n = w$$

for et vilkårlig komplekst tall w. Vi skal se med egne øyne at denne likningen alltid har n løsninger. Vi begynner med å skrive w på polar form med valgfritt antall omdreininger rundt origo

$$w = re^{i\theta} = re^{i(\theta + 2m\pi)}.$$

Dersom vi skriver

$$w^{1/n} = (re^{i(\theta+2m\pi)})^{1/n} = \sqrt[n]{r} e^{i(\theta/n + 2m\pi/n)},$$

ser vi at det nå finnes n potensielle verdier for $\sqrt[n]{w}$, alle sammen gyldige løsninger av $z^n = w$. Hvis du velger $0 \leq m \leq n-1$ får du ut alle sammen. Vi definerer den prinsipale n-te roten av w som

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r} e^{i\theta/n},$$

og så kan vi skrive de andre røttene som

$$\sqrt[n]{w} \cdot e^{2m\pi i/n}$$

for $1 \leq m \leq n-1$. Dette er analogt til hvordan man i det reelle tilfellet har to løsninger av ligningen

$$x^2 = 4,$$

definerer kvadratroten som den positive løsningen

$$\sqrt{4} = 2,$$

og skriver den andre løsningen som $-\sqrt{4}$.

Eksempel 10.6. Vi finner alle løsninger av ligningen

$$z^5 = -1.$$

Siden

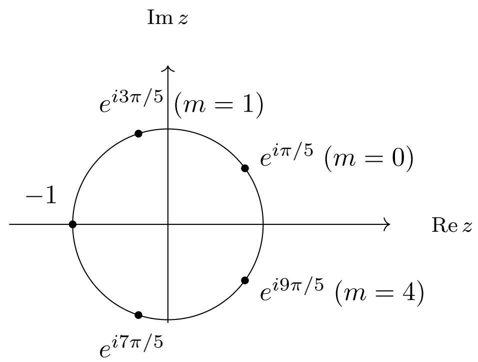
$$-1 = e^{i(\pi + 2m\pi)},$$

får vi

$$(-1)^{1/5} = e^{i(\pi/5 + 2m\pi/5)},$$

og for $0 \leq m \leq 4$ spyttes ut

$e^{i\pi/5}(= \sqrt[5]{-1})$, $e^{i3\pi/5}$, $e^{i5\pi/5}(= -1)$, $e^{i7\pi/5}$ og $e^{i9\pi/5}$.



Femterøttene til -1

Merk hvordan røttene sprer seg jevnt ut på en sirkel om origo. Merk også at om vi lar $m > 4$ eller $m < 0$, får vi røtter som allerede er listet opp. △

Går alt dette greit?

Dette har vært et litt kjapt kapittel. Vi har jo ikke vist noe som helst, bare definert komplekse tall, sagt at i oppfører seg som tallene vi kjenner fra før, og slengt ut en masse regneregler uten å argumentere for at dette går greit, eller at det i det hele tatt finnes et tallsystem der likningen

$$x^2 + 1$$

har en løsning.

Konstruksjonen av de reelle tallene $\mathbb{R}$ fra de rasjonale tallene $\mathbb{Q}$ er komplisert nok til at selv matematikkstudenter ikke blir plaget nevneverdig med det. Den formelle konstruksjonen av $\mathbb{C}$ fra $\mathbb{R}$ er ikke på langt nær så komplisert, men man trenger fremdeles noen konsepter som ligger noe utenfor det vi kan gjøre i dette kurset.

De reelle tallene er et eksempel på en *ordnet* kropp med addisjon og multiplikasjon. Det at de er ordnet, betyr at man alltid kan avgjøre hvilket av to reelle tall som er størst, og kropp betyr at de tilfredsstiller noen aksiomer som er til forveksling like vektorromsaksiomene, og noen andre aksiomer i tillegg. De komplekse tallene er et eksempel på en kropp som ikke er ordnet, siden man ikke kan si om et komplekst tall er større enn et annet, akkurat som vi ikke i $\mathbb{R}^2$ kan si at en vektor er større enn en annen. (Du kan si at en vektor er lengre enn en annen, men det er ikke noen ordning, for to forskjellige vektorer kan være like lange. To reelle tall er like store kun dersom de er identiske.)

Oppgaver

1. Finn real- og imaginærdelen til

a) z^4

b) $\frac{1}{z}$

c) $\frac{z-1}{z+1}$

d) $\frac{1}{z^2}$

2. Beregn og merk av i det komplekse planet

a) $(1+2i)^3$

b) $\frac{5}{-3+4i}$

c) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$

3. Løs ligningene

a) $z^2 - z + 5 = 0$

b) $z^3 = 2i$

c) $z^4 = 2$

d) $z^5 = 2 + 2i$

4. Vis at

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

for alle komplekse tall z og w.

5. En variant av Eulers formel kalles de Moivres formel

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

a) Utled de Moivres formel.

b) Vis at $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$.

6. La z og w være følgende komplekse tall:

$$z = \frac{3\pi}{4} i \qquad w = -\frac{3\pi}{4} i$$

a) Skriv tallet $e^z - e^w$ på polar form.

b) Skriv tallet e^z / e^w på polar form.

c) Er det enkelt å dele komplekse tall på polar form? Hva med addere? Sammenlign med kartesisk form, altså $a + bi$.

7. Røtter er sunt.

a) Skriv det komplekse tallet $-1 + i\sqrt{3}$ på polar form.

b) Vis at $-1 + i\sqrt{3}$ er en sjetterot av 64.

c) Finn alle sjetterøttene til 64. Skissér dem i det komplekse planet.

8. Jeg sa du skulle pugge binomialteoremet!

a) Finn alle løsninger av likningen

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0.$$

Skissér løsningene i det komplekse planet.

b) Finn alle løsninger av likningen

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 2 = 0$$

ved å bruke svaret du fant i **a)**. Skissér løsningene i det komplekse planet.

9. Noen artige polygoner.

a) Finn alle tredjerøttene til 1. Tegn en rett linje fra løsning til løsning, etter økende vinkel. Hva slags geometrisk figur er dette?

b) Repeter del **a)** for alle fjerderøttene til 1.

c) Repeter del **a)** for alle n-terøttene ($n \geq 3$) til 1.

d) Får vi samme geometriske figur i **c)** dersom vi bytter ut 1 med et reelt tall $r \neq 0$? Hva med et generelt komplekst tall $w \neq 0$?

10. Vis at dersom koeffisentene a_i i polynomligningen

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$$

er reelle, kommer løsningene i konjugatpar, altså at dersom w er en løsning, er også $\overline{w}$ en løsning.

11. La z og w være to komplekse tall, begge ulik null. Er det mulig at $zw = 0$?

12. La $n > 0$, og la z være en n-terot av et reelt tall. Er $\bar{z}$ også en n-terot av dette tallet?

13. Vis at $\mathbb{C}$ er et vektorrom.

14. Vis at vektorrommet som består av alle matriser på formen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

er isomorft med $\mathbb{C}$.

11 Kompleks lineær algebra

I dette kapitlet er det fire sentrale poenger som skal drives gjennom:

- Skalarene i definisjonen av vektorrom kan være andre tall enn de reelle.
- Lineæralgebra over $\mathbb{C}$ er stort sett helt likt som over $\mathbb{R}$.
- Alle $n \times n$-matriser har n komplekse egenverdier om du teller med multiplisiteten til egenverdiene.
- Egenrommet har dimensjon mindre enn eller lik multiplisiteten til den tilhørende egenverdien.

Definisjonen av vektorrom II

De rasjonale tallene $\mathbb{Q}$, de reelle tallene $\mathbb{R}$, og de komplekse tallene $\mathbb{C}$ er alle eksempler på et konsept kalt kropp. En kropp er et tallsystem med to regneoperasjoner $+$ og $\cdot$, som tilfredsstiller ti-tolv aksiomer, hvorav noen ligner ganske bra på vektorromsaksiomene. Vi skal ikke gå gjennom disse aksiomene, men sentralt for en kropp er at alle elementer i kroppen har multiplikativ invers.

Vektorromsaksiomene opererer med to ting som kombineres, nemlig skalarer og vektorer. Tidligere har vi bare sagt at vektorer kan ganges med skalarer, men ikke åpnet for at disse kan være noe annet enn reelle tall. Det skal vi gjøre noe med nå. Vi skal ikke endre på aksiomene for vektorrom, men vi skal begynne å spesifisere hva slags skalarer som kan ganges med vektorer.

Definisjon. La V være en mengde, og K en kropp. De to operasjonene er fremdeles

$$\text{addisjon av vektorer: } \mathbf{u} + \mathbf{v}$$
$$\text{skalarmultiplikasjon: } c \cdot \mathbf{u}$$

Addisjonen er definert for alle elementer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i V, og skalarmultiplikasjonen for alle skalarer c i K og alle $\mathbf{u}$ i V. Resultatet av operasjonene skal alltid være et element i V. Dersom kombinasjonen V og K oppfyller vektorromsaksiomene, så sier vi at V er et *vektorrom over K*. △

Definisjon. Vi skriver $\mathbb{C}^n$ for vektorrommet der $K = \mathbb{C}$ og vektorene er kolonnevektorer med komplekse komponenter

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$ △

Eksempel 11.1. Standardbasisen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

for $\mathbb{R}^n$ er også en basis for $\mathbb{C}^n$. Det er lett å se at alle elementer i $\mathbb{C}^n$ kan skrives som en unik lineærkombinasjon av elementene i basisen:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \\ &= z_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + z_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + z_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$ △

Eksempel 11.2. Man kan også se på $\mathbb{C}^n$ som et vektorrom over $\mathbb{R}$, men da er ikke standardbasisen for $\mathbb{R}^n$ en basis for $\mathbb{C}^n$. En basis er

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ + &\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

og vi ser at dimensjonen er $2n$. En tilfeldig vektor $\mathbf{z}$ i $\mathbb{C}^n$ kan skrives

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{bmatrix} \\ &= a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + a_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ &+ b_1 \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + b_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$ △

Eksempel 11.3. $\mathbb{R}^n$ et vektorrom over $\mathbb{R}$. △

Eksempel 11.4. $\mathbb{Q}^n$ et vektorrom over $\mathbb{Q}$. Selv om vi har sagt at vi har gjort lineær algebra på $\mathbb{R}^n$ til nå, har vi i praksis operert på $\mathbb{Q}^n$. Ikke et eneste matriseeksempel har involvert $\sqrt{2}$. △

Eksempel 11.5. $\mathcal{P}^n$ er et vektorrom over $\mathbb{R}$ slik vi har jobbet med det. Men det er ingenting i veien for å behandle polynomer der kroppen, variabelen og koeffisientene alle er komplekse. △

Eksempel 11.6. De hele tallene $\mathbb{Z}$ er ikke en kropp, så en del av teoremene vi har bevist, gjelder ikke for $\mathbb{Z}^n$. Vi har jo sett at et $n \times n$-likningssystem med komponenter i $\mathbb{Z}$ og lineært uavhengige kolonner, ikke nødvendigvis noen løsning i $\mathbb{Z}^n$. △

Lineær algebra over $\mathbb{C}$

Vi starter dette avsnittet med et litt suspekt teorem. Så tar vi noen eksempler på lineæralgebra over $\mathbb{C}$.

«Teorem» 11.7. *Alt vi har gjort til nå, fungerer helt likt i $\mathbb{C}^n$ som i $\mathbb{R}^n$. Noen ting fungerer til og med bedre.*

Eksempel 11.8. Vi begynner med å løse likningssystemet

$$\begin{aligned}(1-i)z + 3w &= 2-3i\\ iz + (1+2i)w &= 1\end{aligned}$$

som har totalmatrise

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-i & 3 & 2-3i\\ i & 1+2i & 1\end{array}\right].$$

Vi ønsker å kvitte oss med i-en til venstre i den andre raden. Den første raden ganget med $\frac{i}{1-i}$ er

$$\left[\begin{array}{cc|c} i & \frac{3i}{1-i} & \frac{3+2i}{1-i}\end{array}\right].$$

Vi trekker dette fra den andre raden og erstatter den andre raden med resultatet:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-i & 3 & 2-3i\\ 0 & 1+2i-\frac{3i}{1-i} & 1-\frac{3+2i}{1-i}\end{array}\right].$$

Jeg tror vi ganger den andre raden med $1-i$ for å rydde litt:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-i & 3 & 2-3i\\ 0 & 3-2i & -2-3i\end{array}\right]$$

Vi er nå klare for å beregne w og z:

$$\begin{aligned} w &= \frac{-2-3i}{3-2i} = \frac{-2-3i}{3-2i}\cdot\frac{3+2i}{3+2i} = -i\\ z &= \frac{2-3i-3(-i)}{1-i} = 1+i \end{aligned}$$

△

Eksempel 11.9. Det kan verifiseres at inversen til

$$\begin{bmatrix}1-i & 3\\ i & 1+2i\end{bmatrix}$$

er

$$\frac{1}{3-2i}\begin{bmatrix}1+2i & -3\\ -i & 1-i\end{bmatrix}$$

ved å gange dem sammen:

$$\frac{1}{3-2i}\begin{bmatrix}1-i & 3\\ i & 1+2i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+2i & -3\\ -i & 1-i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

△

Eksempel 11.10. Vi sjekker lineær uavhengighet akkurat som i det reelle tilfellet, altså ved å beregne nullrommet eller determinanten. For eksempel er kolonnene i matrisen

$$\begin{bmatrix}2i & 3 & 4\\ 3i & 4 & 5\\ 4i & 5 & 6\end{bmatrix}$$

lineært avhengige, siden

$$-i\begin{bmatrix}2i\\3i\\4i\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

△

Komplekse egenverdier

Fra forrige kapittel husker vi at et n-te ordens polynom alltid kan faktoriseres i n lineære faktorer. Dersom vi teller repeterte faktorer, er det vanlig å si at en polynomlikning

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$$

har n løsninger.

Teorem 11.11. *Det karakteristiske polynomet til en $n\times n$-matrise har alltid orden n. En matrise har alltid n egenverdier dersom du teller med multiplisiteten til hver egenverdi.*

Vi skal ta noen eksempler der vi beregner egenverdier. Vi beregner egenvektorene i neste avsnitt.

Eksempel 11.12. Matrisen

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

har visst egenverdier allikevel, se eksempel 7.5. Det karakteristiske polynomet er

$$\lambda^2 + 1,$$

så egenverdiene er $\pm i$. △

Eksempel 11.13. Matrisen

$$\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

har karakteristisk polynom

$$(3-\lambda)((1-\lambda)^2+1) = (3-\lambda)(2-2\lambda+\lambda^2).$$

Den ene egenverdien er åpenbart $\lambda = 3$, mens andregradspolynomet $2-2\lambda+\lambda^2$ har røtter

$$\lambda = \frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = 1\pm i.$$

Her er det altså en reell egenverdi 3, og to komplekse egenverdier $1+i$ og $1-i$. △

Teorem 11.14. *Egenverdiene til en reell matrise kommer i komplekskonjugerte par.*

Eksempel 11.15. Matrisen

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

har karakteristisk likning

$$(2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0,$$

med en enkel egenverdi $\lambda = 2$, og en dobbel egenverdi $\lambda = 1$. △

Mer om egenrommet

En $n \times n$-matrise har alltid n egenverdier, men ikke nødvendigvis n lineært uavhengige egenvektorer.

Eksempel 11.16. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

har egenverdier

$$\lambda = \pm i.$$

Egenrommet til $-i$ er nullrommet til

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$

Vi vet at denne matrisen ikke er inverterbar, og da må radene være skalarmultipler av hverandre (i dette tilfellet er den nederste i ganger den øverste), så vi kan egentlig bare stryke den nederste, og se at

$$ix_1 - x_2 = 0,$$

slik at en egenvektor til $-i$ blir

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Likeledes blir en egenvektor til i

$$\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi dobbeltsjekker

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

Eksempel 11.17. Vi beregner egenrommet til matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sin egenverdi $\lambda = 1 - i$. Dette er nullrommet til

$$\begin{bmatrix} 2+i & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}.$$

Den øverste raden forteller at $x_1 = 0$. De to nedereste ligner mistenkelig på forrige eksempel, så en egenvektor blir

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Vi dobbeltsjekker

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \\ 1+i \end{bmatrix} = (1-i) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

Eksempel 11.18. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

har dobbel egenverdi $\lambda = 1$. Det tilhørende egenrommet er nullrommet til

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dette gir at $x_2 = x_3 = 0$, så en egenvektor til $\lambda = 1$ er

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Her er egenrommet endimensjonalt, mens egenverdien hadde multiplisitet 2. $\triangle$

Teorem 11.19. *Egenrommet har dimensjon mindre enn eller lik multiplisiteten til egenverdien.*

Dersom et egenrom har lavere dimensjon enn multiplisiteten til egenverdien, sier vi at egenverdien er *defekt*. Dersom en $n \times n$-matrise har n lineært uavhengige egenvektorer, sier vi at den er *diagonaliserbar*. Grunnen til dette navnet skal vi komme tilbake til.

Oppgaver

1. Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} (1+i)z - w &= i \\ (1-i)z + (1+i)w &= 1. \end{aligned}$$

2. Er kolonnene lineært avhengige? Hvis ja, finn nullrommet til matrisen.

a)

$$\begin{bmatrix} 2i & 3i & 4i \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2i & 3 & 4 \\ 3 & 4i & 5 \\ 4 & 5 & 6i \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 2i & 3 & 4 \\ 3i & 4 & 5 \\ 4i & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Finn hver matrises determinant, egenverdier og tilhørende egenrom.

a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Beregn produktet av egenverdiene for hver matrise i forrige oppgave.

5. Finn en vektor $\mathbf{w}$ slik at

$$\mathbf{w}, \qquad \begin{bmatrix} -3 \\ 2i \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1+i \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

spenner ut $\mathbb{C}^3$.

6. Finn a slik at vektoren

$$\begin{bmatrix} a \\ 6-6i \\ -12 \end{bmatrix}$$

ligger i planet utspent av

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 2i \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

ekvivalent har matriseligningen

$$\begin{bmatrix} a \\ 6-6i \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2i & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$$

en løsning. Dette gir at $b = -3$ og $c = 6$ slik at

$$a = 3b + c = 15$$

7. Vis at dersom matrisen A har egenverdi λ, har A^2 egenverdi λ^2.

8. Finn egenverdiene til rotasjonsmatrisen

$$T_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Hva er egenverdiene til $T_{2\theta}$?

9. Beregn determinanten. Følg nøye med, det kan være det ikke er så mye jobb som det ser ut.

a)

$$\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} i & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} i & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

e)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Sett sammen egenvektorene til

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i en 3×3-matrise P der egenvektorene er kolonner, og beregn $P^{-1}AP$.

11. Finn egenverdiene til matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

12. Vis at dersom en matrise har egenverdien 0, er den singulær.

12 Projeksjon

En projeksjon er en lineærtransformasjon P som tilfredsstiller

$$P\mathbf{x} = P^2\mathbf{x}.$$

for alle $\mathbf{x}$. Denne ligningen sier at intet nytt skjer om du benytter lineærtransformasjonen for andre gang, og man kan tenke at $P\mathbf{x}$ er skyggen $\mathbf{x}$ kaster dersom man lyser på $\mathbf{x}$ med en lommelykt. Vi skal begrense oss til å studere ortogonale projeksjoner. Dette betyr at lommelykten står slik at $\mathbf{x}$ og $P\mathbf{x}$ danner en rettvinklet trekant.

Ortogonal projeksjon i $\mathbb{R}^2$

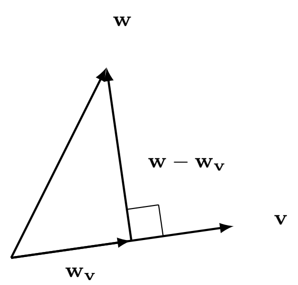
Du husker skalarproduktet fra gymnaset. Du har lært to måter å beregne skalarproduktet, nemlig

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \cos\theta,$$

der θ er vinkelen mellom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$, og

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Vi bruker skalarproduktet til å projisere vektorer ortogonalt på hverandre. Det sentrale spørsmålet er: hvordan kan vi skrive vektoren $\mathbf{w}_\mathbf{v}$ i figuren under?



Hva er projeksjon?

Vi kan utlede en formel for lengden:

$$\|\mathbf{w}_\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| \cos\theta = \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{w}\| \cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|},$$

slik at

$$\mathbf{w}_\mathbf{v} = \|\mathbf{w}_\mathbf{v}\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v}.$$

Denne vektoren kalles gjerne $\mathbf{w}$ sin komponent i retningen gitt av $\mathbf{v}$, eller $\mathbf{w}$ sin projeksjon på $\mathbf{v}$. Komponenten til $\mathbf{w}$ ortogonalt på $\mathbf{v}$ er

Eksempel 12.1. Vektoren

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sin komponent i retningen gitt av

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er:

$$\mathbf{w}_\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{4}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

VI kan også beregne lengden $\mathbf{w} - \mathbf{w}_\mathbf{v}$:

$$\mathbf{w} - \mathbf{w}_\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{3}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \triangle$$

Adjungering

Før vi kan generalisere projeksjon til $\mathbb{C}^n$, må vi utvide transponeringsoperasjonen litt.

Definisjon. La

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

være en kompleks $m \times n$-matrise. Den *adjungerte* av A er $n \times m$-matrisen

$$A^* = \begin{bmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{21} & \cdots & \overline{a}_{m1} \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{1n} & \overline{a}_{2n} & \cdots & \overline{a}_{mn} \end{bmatrix}$$

der radene og kolonnene i A er byttet om, og alt er komplekskonjugert. $\triangle$

Merk. Å adjungere en reell matrise er det samme som å transponere den.

Eksempel 12.2. Hvis vi lar A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5i & 0 & -2i \\ 3 & i & 4 \end{bmatrix},$$

så er den adjungerte av A^* gitt ved:

$$A^* = \begin{bmatrix} -5i & 3 \\ 0 & -i \\ 2i & 4 \end{bmatrix}$$

Hvis vi adjungerer denne matrisen igjen, så kommer vi tilbake til utgangspunktet:

$$(A^*)^* = A \qquad \triangle$$

Vi tar med noen regneregler for adjungering.

Teorem 12.3. *For enhver matrise A har vi at å adjungere to ganger gir den opprinnelige matrisen:*

$$(A^*)^* = A$$

Hvis A og B er matriser sik at produktet AB er definert, så er den adjungerte av produktet lik produktet av de adjungerte, i motsatt rekkefølge:

$$(AB)^* = B^* A^*$$

Indre- og ytreprodukt

La $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være kolonnevektorer i $\mathbb{C}^n$. *Indreproduktet* mellom dem er definert som:

$$\mathbf{v}^*\mathbf{w} = \overline{v}_1 w_1 + \overline{v}_2 w_2 + \cdots + \overline{v}_n w_n$$

Ytreproduktet er:

$$\mathbf{w}\mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} w_1\overline{v}_1 & w_1\overline{v}_2 & \cdots & w_1\overline{v}_n \\ w_2\overline{v}_1 & w_2\overline{v}_2 & \cdots & w_2\overline{v}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n\overline{v}_1 & w_n\overline{v}_2 & \cdots & w_n\overline{v}_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{w}\overline{v}_1 & \mathbf{w}\overline{v}_2 & \ldots & \mathbf{w}\overline{v}_n \end{bmatrix}$$

Vi har definert indre- og ytreprodukt for kolonnevektorer. Det er ikke noe problem å sette opp tilsvarende definisjoner for rekkevektorer, men det skal vi ikke plage dere med. Vi definerer *lengden* til en vektor $\mathbf{v}$ som

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}^*\mathbf{v}},$$

og vi sier at $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er *ortogonale* dersom

$$\mathbf{v}^*\mathbf{w} = \mathbf{w}^*\mathbf{v} = 0.$$

Merk. Dersom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er reelle, blir indreproduktet

$$\mathbf{v}^*\mathbf{w} = \mathbf{v}^T\mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$$

slik du er vant til fra gymnaset. Resultatet av dette produktet er en skalar, og det er derfor man gjerne kaller det skalarproduktet.

Merk. $\mathbf{v}^*\mathbf{v}$ består av de kvadrerte absoluttverdiene til komponentene til $\mathbf{v}$.

Merk. Ytreproduktet $\mathbf{w}\mathbf{v}^*$ er en ikke inverterbar matrise, siden alle kolonnene er parallelle.

Eksempel 12.4. I $\mathbb{R}^2$ er $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ ortogonale dersom vinkelen mellom dem er $\pi/2$. $\triangle$

Eksempel 12.5. Vektorene

$$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

er ortogonale. $\triangle$

Eksempel 12.6. Vektorene

$$\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$$

er ortogonale. $\triangle$

Eksempel 12.7. Vektoren $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$ har lengde 1 for alle $\mathbf{w} \neq 0$. $\triangle$

Vi tar med noen regneregler for indre- og ytreprodukt. Disse er lette å utlede, så vi dropper bevisene.

Teorem 12.8. *Indreproduktet tilfredsstiller følgende regneregler:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^*\mathbf{w} &= \overline{\mathbf{w}^*\mathbf{v}}\\
(c\mathbf{v})^*\mathbf{w} &= \bar{c}(\mathbf{v}^*\mathbf{w}) = \mathbf{v}^*(\bar{c}\mathbf{w})\\
(\mathbf{v}+\mathbf{u})^*\mathbf{w} &= \mathbf{v}^*\mathbf{w} + \mathbf{u}^*\mathbf{w}\\
\mathbf{v}^*(\mathbf{w}+\mathbf{u}) &= \mathbf{v}^*\mathbf{w} + \mathbf{v}^*\mathbf{u}
\end{aligned}$$

Det neste på posten er Pytagoras' teorem.

Teorem 12.9. *Dersom vektorene* $\mathbf{v}$ *og* $\mathbf{w}$ *er ortogonale, er*

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2.$$

Bevis. Vi vet at

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 &= (\mathbf{v}-\mathbf{w})^*(\mathbf{v}-\mathbf{w})\\
&= \mathbf{v}^*\mathbf{v} - \mathbf{v}^*\mathbf{w} - \mathbf{w}^*\mathbf{v} + \mathbf{w}^*\mathbf{w}\\
&= \|\mathbf{v}\|^2 - \mathbf{v}^*\mathbf{w} - \mathbf{w}^*\mathbf{v} + \|\mathbf{w}\|^2\\
&= \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2
\end{aligned}$$

siden $\mathbf{v}^*\mathbf{w} - \mathbf{w}^*\mathbf{v} = 0$. siden $\mathbf{v}^*\mathbf{w} = 0$ og $\mathbf{w}^*\mathbf{v} = 0$. $\square$

Projeksjon i $\mathbb{C}^n$

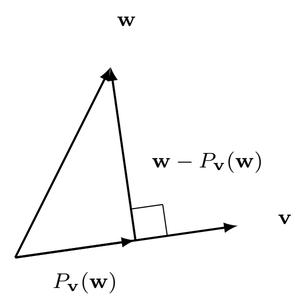
En naturlig generalisering av projeksjon på $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ er lineærtransformasjonen

$$P_{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}.$$

Assosiativiteten til matrisemultiplikasjon gir at vi kan skrive

$$P_{\mathbf{v}}\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}\mathbf{w} = \mathbf{v}\frac{\mathbf{v}^*\mathbf{w}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}^*\mathbf{w}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}\mathbf{v}$$

så likheten med projeksjon i $\mathbb{R}^2$ er slående.



Hva er projeksjon?

Eksempel 12.10. La oss projisere vektoren

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix}-5i\\0\\2i\end{bmatrix}$$

både på og normalt på

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix}3\\-i\\4\end{bmatrix}.$$

Vi beregner:

$$\mathbf{v}^*\mathbf{v} = 3\cdot 3 + i\cdot(-i) + 4\cdot 4 = 26$$

og

$$\mathbf{v}^*\mathbf{w} = 3\cdot(-5i) + i\cdot 0 + 4\cdot 2i = -7i$$

slik at

$$P_{\mathbf{v}}\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}^*\mathbf{w}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{-7i}{26}\begin{bmatrix}3\\-i\\4\end{bmatrix}$$

og

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) &= \mathbf{w} - \frac{\mathbf{v}^*\mathbf{w}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}\mathbf{v}\\
&= \begin{bmatrix}-5i\\0\\2i\end{bmatrix} - \frac{-7i}{26}\begin{bmatrix}3\\-i\\4\end{bmatrix} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix}-109i\\7\\80i\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\triangle$

Mer om ortogonalitet

Definisjon. En *ortogonal mengde* er en mengde vekorer $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ...,$\mathbf{u}_n$, slik at

$$\mathbf{u}_i^*\mathbf{u}_k = 0$$

for alle vektorer $\mathbf{u}_i$ og $\mathbf{u}_k$ i mengden. Dersom i tillegg $\|\mathbf{u}_j\| = 1$ for alle vektorene, sier vi at mengden er *ortonormal*.

Eksempel 12.11. Standardbasisen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,...,$\mathbf{e}_n$ for $\mathbb{C}^n$ er en ortogonal mengde. △

Definisjon. Dersom en ortogonal mengde $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ...,$\mathbf{u}_n$ spenner ut et rom V, sier vi at mengden er en *ortogonal basis* for V.

Definisjon. Det er vanlig å sette opp $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ...,$\mathbf{u}_n$ som kolonner i en matrise U. Vi sier da at U er en *ortogonal matrise.*

Hvis vi har en ortogonal basis for et rom, er det veldig lett å finne en vektors komponenter i rommet. La oss si at vi ønsker å finne vektoren $\mathbf{v}$ sine komponenter i basisen $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ...,$\mathbf{u}_n$. Komponentene til $\mathbf{v}$ er gitt ved likningen

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + ...x_n\mathbf{u}_n = U\mathbf{x}$$

Hvis vi ganger begge sider av denne likningen med U, får vi

$$U^*\mathbf{v} = U^*U\mathbf{x},$$

og siden kolonnene til U er ortogonale, blir den kvadratiske matrisen U^*U diagonal:

$$U^*U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^*\mathbf{u}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{u}_2^*\mathbf{u}_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u}_3^*\mathbf{u}_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{u}_n^*\mathbf{u}_n \end{bmatrix}.$$

Følgelig er løsningen av systemet $U^*\mathbf{v} = U^*U\mathbf{x}$ enkel å skrive opp.

Teorem 12.12. *La $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ...,$\mathbf{u}_n$ være en ortogonal basis for V, og la $\mathbf{v} \in V$. I så fall kan $\mathbf{v}$ skrives*

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= P_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v} + P_{\mathbf{u}_2}\mathbf{v} + ... + P_{\mathbf{u}_n}\mathbf{v} \\ &= \frac{\mathbf{u}_1^*\mathbf{v}}{\mathbf{u}_1^*\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2^*\mathbf{v}}{\mathbf{u}_2^*\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + ... + \frac{\mathbf{u}_n^*\mathbf{v}_n}{\mathbf{u}_n^*\mathbf{u}_n}\mathbf{u}_n\end{aligned}$$

Vi kan også projisere en vektor ned i et rom der den ikke hører hjemme. Projeksjonen minimerer avstanden fra rommet til vektoren.

Teorem 12.13. *La $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ...,$\mathbf{u}_n$ være en ortogonal basis for V, og la $\mathbf{v} \notin V$. Punktet*

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= P_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v} + P_{\mathbf{u}_2}\mathbf{v} + ... + P_{\mathbf{u}_n}\mathbf{v} \\ &= \frac{\mathbf{u}_1^*\mathbf{v}}{\mathbf{u}_1^*\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2^*\mathbf{v}}{\mathbf{u}_2^*\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + ... + \frac{\mathbf{u}_n^*\mathbf{v}_n}{\mathbf{u}_n^*\mathbf{u}_n}\mathbf{u}_n\end{aligned}$$

er det punktet i V som har kortest avstand til $\mathbf{v}$:

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\| = \min_{\mathbf{w}\in V} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$

Bevis. Vi må først bevise at $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ står ortogonalt på V. Rommet V er utspent av $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ...,$\mathbf{u}_n$. Vi sjekker at $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ står ortogonalt på hver $\mathbf{u}_j$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')^*\mathbf{u}_j &= \mathbf{v}^*\mathbf{u}_j - (\mathbf{v}')^*\mathbf{u}_j \\ &= \mathbf{v}^*\mathbf{u}_j - \mathbf{v}^*\mathbf{u}_j = 0\end{aligned}$$

Dersom $\mathbf{w} \in V$, ligger også $\mathbf{w} - \mathbf{v}'$ i V, og da står $\mathbf{w} - \mathbf{v}'$ og $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ ortogonalt på hverande. Pytagoras' teorem gir

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 &= \|\mathbf{v} - \mathbf{v}' - (\mathbf{w} - \mathbf{v}')\|^2 \\ &= \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|^2 + \|\mathbf{w} - \mathbf{v}'\|^2 \geq \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|^2,\end{aligned}$$

for alle $\mathbf{w} \in V$, slik at

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|,$$

og

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\| = \min_{\mathbf{w}\in V} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|.$$ □

Gram-Schmidts metode

La $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ...,$\mathbf{v}_n$ være en lineært uavhengig vektormengde. Vi skal lage oss en ortogonal basis $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ...,$\mathbf{u}_n$ for rommet utspent av vektorene i mengden. Vi begynner med å definere

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$$

Vektoren $\mathbf{v}_2$ er ikke nødvendigvis ortogonal på $\mathbf{u}_1$, men

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - P_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_1^*\mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1^*\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1$$

er. Vektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - P_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_3 - P_{\mathbf{u}_2}\mathbf{v}_3 \\ &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{u}_1^*\mathbf{v}_3}{\mathbf{u}_1^*\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{u}_2^*\mathbf{v}_3}{\mathbf{u}_2^*\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2\end{aligned}$$

er ortogonal på både $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$. De tre vektorene $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ og $\mathbf{u}_3$ spenner ut det samme rommet som $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$. Nå kan vi fortsette slik, og definere rekursivt

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_k &= \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} P_{\mathbf{u}_j}\mathbf{v}_k \\ &= \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\mathbf{u}_j^*\mathbf{v}_k}{\mathbf{u}_j^*\mathbf{u}_j}\mathbf{u}_j.\end{aligned}$$

Teorem 12.14. *Mengden $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ...,$\mathbf{u}_n$ er en ortogonal basis for rommet utspent av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ...,$\mathbf{v}_n$.*

Bevis. Vi bruker induksjon. Det er lett å se at $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ er ortogonale:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1^*\mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_1^*(\mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_1^*\mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1^*\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1) \\ &= \mathbf{u}_1^*\mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_1^*\mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1^*\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1^*\mathbf{u}_1 \\ &= \mathbf{u}_1^*\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_1^*\mathbf{v}_2 = 0\end{aligned}$$

Siden $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ er ikketrivielle lineærkombinasjoner av de lineært uavhegnige vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, er det åpenbart at $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ spenner ut det samme rommet som $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.

La nå

$$V_k = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}.$$

Vi antar at $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$ er en ortogonal basis for V_{k-1}. Vi må vise at $\mathbf{u}_k$ står ortogonalt på V_{k-1}, og at $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ spenner ut V_k. Vi sjekker indreproduktet av $\mathbf{u}_j$ med $\mathbf{u}_k$. Siden $\mathbf{u}_j^*\mathbf{u}_m = 0$ når $j \neq m$, får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_j^*\mathbf{u}_k &= \mathbf{u}_j^*(\mathbf{v}_k - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\mathbf{u}_m^*\mathbf{v}_k}{\mathbf{u}_m^*\mathbf{u}_m}\mathbf{u}_m) \\ &= \mathbf{u}_j^*\mathbf{v}_k - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\mathbf{u}_m^*\mathbf{v}_k}{\mathbf{u}_m^*\mathbf{u}_m}\mathbf{u}_j^*\mathbf{u}_m \\ &= \mathbf{u}_j^*\mathbf{v}_k - \mathbf{u}_j^*\mathbf{v}_k = 0.\end{aligned}$$

Vi ser altså at $\mathbf{u}_k$ står ortogonalt på alle $\mathbf{u}_j$, og siden $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$ er en ortogonal basis for V_{k-1}, står $\mathbf{u}_k$ ortogonalt på V_{k-1}. Siden $\mathbf{v}_k$ er lineært uavhengig av $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$, og $\mathbf{u}_k$ er en lineærkombinasjon av V_k og $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$, spenner $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ ut V_k. $\square$

Minste kvadraters metode

Dette er en teknikk for å finne tilnærmede løsninger til systemer med flere likninger enn ukjente. La oss si at A er en $m \times n$-matrise, $\mathbf{x}$ og $\mathbf{b}$ er kolonnevektorer i $\mathbb{C}^n$, og at vi ønsker å betrakte systemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

for $m > n$. Dette systemet vil ikke ha noen løsning med mindre $\mathbf{b}$ tilfeldigvis ligger i kolonnerommet til A, så vi ønsker istedet å finne den $\mathbf{x}$ som minimerer avstanden fra $A\mathbf{x}$ til $\mathbf{b}$. Hvis vi krever at vektoren $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ står ortogonalt på kolonnerommet til A, oppnår vi dette. Altså må vi ha

$$A^*(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

eller

$$A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}.$$

Dette er et $n \times n$-system som kalles normalligningene. Løsningen av systemet gir den $\mathbf{x}$ som minimerer avstanden fra $A\mathbf{x}$ til $\mathbf{b}$.

Eksempel 12.15. Vi ønsker å bruke minste kvadrats metode på systemet med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1-i \\ i & i & 1+i \\ 0 & i & i \end{array}\right]$$

Vi ganger matrisen på venstre side av ligningssystemet med sin adjungerte

$$\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ 1 & -i & -i \end{bmatrix}$$

og får

$$\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ 1 & -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & i \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi ganger høyresiden med den adjungerte av venstresiden, og får

$$\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ 1 & -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 3-2i \end{bmatrix}$$

Løsningen av systemet med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-i \\ 1 & 3 & 3-2i \end{array}\right]$$

er

$$\begin{bmatrix} -i/ \\ 1-i/2 \end{bmatrix}.$$

Dette betyr at vektoren

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & i \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i/ \\ 1-i/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i/2 \\ 3/2+i \\ 1/2+i \end{bmatrix}$$

er det punktet i kolonnerommet til matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & i \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

som minimerer avstanden til punktet

$$\begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \\ i \end{bmatrix}$$

$\triangle$

Litt om polynominterpolasjon

Hvis du har $n+1$ punkter (x_i, y_i) i $\mathbb{R}^2$, der x_i er forskjellig for alle punkter, vil det generelt være mulig å finne et reelt polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

hvis graf går gjennom alle disse punktene, altså at

$$p(x_i) = y_i$$

for alle $1 \le i \le n+1$. Dette kalles *interpolasjon.* Likningene over utgjør et $(n+1)\times(n+1)$-likningssystem for koeffisientene a_i med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \dots & x_{n+1} & 1 & y_{n+1} \end{array}\right]$$

Det kan vises at dette ligningssystemet alltid har entydig løsning så lenge $x_j \neq x_k$ for $j \neq k$, men det skal vi ikke gjøre. Det følger at du alltid kan interpolere $n+1$ punkter med et polynom av orden n på en entydig måte.

Eksempel 12.16. Vi prøver å finne et annengradspolyom som går gjennom punktene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Et annengradspolynom skrives $p(x) = ax^2 + bx + c$, så likningssystemet blir

$$\begin{cases} \phantom{4a + 2b + {}} c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases}$$

Løsningen er $a = 1$, $b = -2$ og $c = 1$, slik at polynomet blir $p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Det er lett å sjekke at polynomet tar de rette verdiene i $x = 0$, $x = 1$ og $x = 2$. $\triangle$

Dersom man prøver å gjøre den samme prosessen med et polynom som har orden $m < n$, vil man få det overbestemte $(n+1) \times (m+1)$systemet

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} x_1^m & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^m & x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^m & x_{n+1}^{n-1} & \dots & x_{n+1} & 1 & y_{n+1} \end{array}\right]$$

Bruker man så minste kvadrats metode på dette systemet, får man et polynom som passer ganske bra til punktene uten at grafen går gjennom hvert enkelt punkt - dette kalles *regresjon.*

Eksempel 12.17. Vi prøver å finne et annengradspolyom som går gjennom punktene

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}.$$

Likningssystemet blir nå

$$\begin{cases} \quad\quad\quad\quad c = 1 \\ a + \;\; b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 2 \end{cases}$$

Dette systemet har ingen løsning, men vi kan bruke minste kvadrats metode. Matrisen er:

$$A = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\\4 & 2 & 1\\9 & 3 & 1\end{bmatrix},$$

mens høyresiden $\mathbf{b}$ er:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}.$$

Den adjungerte A^* er:

$$A^* = \begin{bmatrix}0 & 1 & 4 & 9\\0 & 1 & 2 & 3\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Vi ganger A^* med A og $\mathbf{b}$, og får

$$A^*A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 4 & 9\\0 & 1 & 2 & 3\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\\4 & 2 & 1\\9 & 3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}98 & 36 & 14\\36 & 14 & 3\\14 & 6 & 4\end{bmatrix}$$

og

$$A^*\mathbf{b} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 4 & 9\\0 & 1 & 2 & 3\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}22\\8\\3\end{bmatrix}$$

Vi må løse systemet $A^*A = A^*\mathbf{b}$, altså systemet med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 98 & 36 & 14 & 22\\ 36 & 14 & 3 & 8\\ 14 & 6 & 4 & 3 \end{array}\right].$$

Løsningen er

$$\begin{bmatrix}0.27710843\\-0.13855422\\-0.01204819\end{bmatrix}$$

slik at polynomet blir

$$p(x) = 0.27710843x^2 - 0.13855422x - 0.01204819. \quad \triangle$$

Oppgaver

1. Finn den adjungerte matrisen til

$$\begin{bmatrix}1+i & 1-i\\2 & -i\\2-i & 1+i\end{bmatrix}$$

2. La

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix}2\\-5\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

Finn vektorprojeksjonen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$. Tegn $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og vektorprojeksjonen i samme koordinatsystem.

3. Hvilke matriser representerer projeksjoner?

a) $\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix}0 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

4. Hvilke av vektorene er ortogonale med hverandre?

a) $\begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}i\\0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}i\\1\\0\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}1\\i\\i\end{bmatrix}$

5. Beregn $P_{\mathbf{u}}$, $I - P_{\mathbf{u}}$, $P_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ og $\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ når

a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$

b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$

c) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}i\\0\\1\end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}i\\1\\0\end{bmatrix}$

6. Vis at vektorene

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \text{og} \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

utgjør en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$, og finn koordinatene til punktet

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

i denne basisen.

7. Finn en ortonormal basis for rommet utspent av

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$

8. Finn vektoren

$$\begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix}$$

sin komponent i rommet utspent av vektorene

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

9. Bruk minste kvadraters metode på det overbestemte systemet

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ **b)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1-i \\ i & i & -1 & 1+i \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & i & 1 & 1 \end{array}\right]$

10. Vi skal finne polynomer som passer til punktene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

a) Det finnes et entydig fjerdegradspolynom som går gjennom alle punktene. Sett opp et ligningssystem for koeffisientene til dette polynomet.

b) Det finnes ingen annengradspolynomer som reiser gjennom alle punktene. Bruk minste kvadraters metode til å finne koeffisientene til det annengradspolynomet som passer best.

11. Nå skal vi finne polynomer som passer til datasettet

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 28 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 65 \end{bmatrix}.$$

a) Finn polynomet $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ med best tilpasning.

b) Ser du noe artig?

12. Anta at $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$. Vis at den inverse matrisen til $A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u_n} \end{bmatrix}$ er gitt ved $A^{-1} = A^\top$.

13. Vis at en samling vektorer som er parvis ortogonale, og forskjellige fra null, er lineært uavhengige.

14. Vis at $\mathbf{v}^*\mathbf{w} = \overline{\mathbf{w}^*\mathbf{v}}$.

15. Vis at $P_\mathbf{v}\mathbf{w}$ og $\mathbf{w} - P_\mathbf{v}\mathbf{w}$ er ortogonale.

13 Diagonalisering

Dette kapitlet avslutter det skal lære om egenverdier og egenvektorer.

Hvorfor heter det diagonalisering?

La A være en $n \times n$-matrise med m lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_m$ og tilhørende egenverdier λ_1, λ_2,$\cdots$, λ_m, . For hver egenvektor gjelder

$$A\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k.$$

Disse m ligningene kan like gjerne organiseres i en matriseligning

$$AV = VD,$$

der

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

og

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_m \end{bmatrix}.$$

Siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige, er matrisen V invertibel dersom $m = n$. Vi ganger med V^{-1} fra høyre og får

$$V^{-1}AV = D.$$

Denne operasjonen kalles å *diagonalisere* A, og dette er grunnen til at en $n \times n$-matrise med n lineært uavhengige egenvektorer kalles diagonaliserbar. Man kan også se det motsatt. Dersom

$$V^{-1}AV = D$$

for en inverterbar $n \times n$-matrise V, kan vi gange fra venstre med V, og få

$$AV = VD$$

Vi ser av denne likningen at kolonnene til V utgjør n lineært uavhengige vektorer for A.

Teorem 13.1. *Vi kan skrive*

$$V^{-1}AV = D$$

hvis og bare hvis A har n lineært uavhengige egenvektorer.

Eksempel 13.2. Vi diagonaliserer matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorene er

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

med respektive egenverdier 3 og 1. Vi definerer

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

og beregner

$$V^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi dobbeltsjekker ved å beregne produktet

$$\begin{aligned} V^{-1}AV &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = D \end{aligned}$$

△

Eksempel 13.3. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

har bare to lineært uavhengige egenvektorer, og er følgelig ikke diagonaliserbar. △

Man kan også snu likningen

$$D = V^{-1}AV$$

om, og få

$$A = VDV^{-1},$$

og dermed tenke på diagonalisering som en faktorisering av A.

Eksempel 13.4. Vi kan faktorisere matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

som

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

△

Merk. I eksemplet over spiller ikke plasseringen av V og V^{-1} noen rolle. Mer om dette under.

Kvadratiske former

La $\mathbf{v}$ være en kolonnevektor i $\mathbb{C}^n$ og A en $n \times n$-matrise. En kvadratisk form er et uttrykk på formen

$$\mathbf{v}^* A \mathbf{v}$$

Et slikt uttrykk er spesielt interessant dersom $\mathbf{v}$ er en egenvektor med lengde 1 og egenverdi λ:

$$\mathbf{v}^* A \mathbf{v} = \mathbf{v}^* \lambda \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}^* \mathbf{v} = \lambda.$$

Eksempel 13.5. Vi lar

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{v}^* A \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 3.$$

△

Symmetriske matriser

Definisjon. En kompleks matrise sies å være *symmetrisk* dersom $A = A^*$.

Merk. Dersom A er reell er $A^* = A^T$, slik at kravet for en symmetrisk matrise er at $A = A^T$. I litteraturen er det vanlig å reservere begrepet *symmetrisk* for reelle matriser der $A = A^T$, mens komplekse matriser kalles *hermittiske* hvis $A = A^*$. Nå er det imidlertid ingen gode grunner til dette, for det er ingen som noen gang transponerer en kompleks matrise.

Eksempel 13.6. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 1-i & 0 & 2-i \\ i & 2+i & 2 \end{bmatrix}$$

er symmetrisk. △

Merk. En symmetrisk matrise må har reelle diagonalelementer, siden $z = \overline{z}$ for alle elementer der.

Definisjon. En $n \times n$-matrise er *ortogonalt diagonaliserbar* dersom den har n ortogonale egenvektorer.

Merk. Denne definisjonen kommer kanskje som troll i eske. Men alt blir klart om litt.

Dersom vi lar V være en $n \times n$-matrise bestående av A sine n ortonormale egenvektorer, ser vi at

$$V^*AV = V^*VD = D$$

siden $V^*V = I$. Motsatt ser vi at dersom

$$V^*AV = D,$$

for en ortonormal matrise V, utgjør V sine kolonner n ortonormale egenvektorer for D.

Teorem 13.7. *Vi kan skrive*

$$V^*AV = D$$

hvis og bare hvis A har n ortogonale egenvektorer.

Teorem 13.8. *Dersom $A = A^*$, er $\mathbf{x}^*A\mathbf{x}$ reell.*

Bevis. Vi tar beviset kun for 2×2-matriser. Selv Gilbert Strang gjør det for sine studenter, og han er professor på Harvard. En symmetrisk 2×2-matrise kan skrives

$$A = \begin{bmatrix} r_1 & z \\ \overline{z} & r_2 \end{bmatrix}$$

der r_1 og r_2 er relle tall. Vi beregner

$$\mathbf{x}^*A\mathbf{x} = r_1x_1\overline{x_1} + z\overline{x_1}x_2 + \overline{z}x_1\overline{x_2} + r_2x_2\overline{x_2}.$$

Nå er $r_1x_1\overline{x_1}$ og $r_2x_2\overline{x_2}$ reelle tall, mens $z\overline{x_1}x_2$ og $\overline{z}x_1\overline{x_2}$ er hverandres komplekskonjugater, og følgelig er $z\overline{x_1}x_2 + \overline{z}x_1\overline{x_2}$ også et reelt tall. □

Teorem 13.9. *En symmetrisk matrise har reelle egenverdier.*

Bevis. La $\mathbf{v}$ være en normalisert egenvektor med egenverdi λ. Vi vet at

$$\mathbf{v}^*A\mathbf{v} = \lambda,$$

og venstresiden er reell, så da må også λ være det. □

Teorem 13.10. *Egenvektorene til to distinkte egenverdier er ortogonale for symmetriske matriser.*

Bevis. La $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være to egenvektorer med egenverdier λ_1 og λ_2. Vi beregner (husk at λ_1 og λ_2 er reelle)

$$\begin{aligned}\lambda_1\mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_2 &= (\lambda_1\mathbf{v}_1)^*\mathbf{v}_2 = (A\mathbf{v}_1)^*\mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{v}_1^*A^*\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^*(A\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1^*(\lambda_2\mathbf{v}_2) = \lambda_2\mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_2\end{aligned}$$

Vi vet altså at

$$0 = \lambda_1\mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_2 - \lambda_2\mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_2,$$

og hvis vi bruker at λ_1 og λ_2 er forskjellige, må vi ha $\mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_2 = 0$. □

Det siste teoremet vi tar med, må vi dessverre la stå ubevist. Det er litt for hardt.

Teorem 13.11. *En symmetrisk matrise er ortogonalt diagonaliserbar.*

Eksempel 13.12. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

har egenverdier 4, 9 og 0. Egenvektorerer er henholdsvis

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Merk at alle vektorer er innbyrdes ortogonale, og matrisen er følgelig ortogonalt diagonaliserbar, med

$$V = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}}. \end{bmatrix}$$

og

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

△

Merk. Det forrige eksemplet viser at en matrise kan være diagonaliserbar uten å være inverterbar.

Oppgaver

1. Finn matrisenes egenverdier og egenvektorer, og avgjør om matrisene er diagonaliserbare.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

2. La $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Beregn A^{10}.

(Hint: Se på $A = VDV^{-1}$. Hva blir A^n?)

3. Finn V og D slik at $A = VDV^*$.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3-i \\ 3+i & 4 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

4. La $A = \begin{bmatrix} r_1 & z \\ \overline{z} & r_2 \end{bmatrix}$ være en symmetrisk 2×2-matrise. Utled en formel for egenverdiene til A.

5. La $a \neq b$ være to reelle tall, begge ulik null, og la

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}.$$

Avgjør om A er diagonaliserbar, og finn egenverdier og egenvektorer.

6. En kompleks matrise A er *normal* dersom $A^*A = AA^*$. Vis at dersom A er symmetrisk, er A normal.

Fun fact: En kompleks matrise er ortogonalt diagonaliserbar hvis og bare hvis den er normal.

7. La $A = \begin{bmatrix} 5 & -1-2i \\ -1-2i & 5 \end{bmatrix}$.

a) Er A symmetrisk?

b) Er A ortogonalt diagonaliserbar?

c) Er A normal?

8. La $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være lineærtransformasjonen som deriverer annengradspolynomer:

$$T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b.$$

a) Finn matrisen A til T med hensyn på basisen $(1, x, x^2)$.

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til A. Er A diagonaliserbar?

9. La $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være lineærtransformasjonen mellom andregradspolynom gitt ved:

$$T(f) = (x+1)f'(x) + f(x).$$

a) Finn matrisen A til T med hensyn på basisen $(1, x, x^2)$.

b) Finn egenverdiene og egenvektorene A. Er A diagonaliserbar?

10. Lineærtransformasjonen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, der A er matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

roterer vektorer i $\mathbb{R}^2$.

a) Hva er rotasjonsvinkelen?

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen.

c) Egenvektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ danner en basis for $\mathbb{C}^2$. Hva er standardmatrisen til T i denne basisen?

14 Systemer av differensiallikninger

I dette kapitlet skal vi bruke det vi har lært om lineær algebra til å løse differensiallikninger. Det finnes differensiallikninger for nesten alt, men det er kun de aller enkleste som er mulig å løse. Et studium av differensiallikninger begynner gjerne med en klassifisering av forskjellige typer likninger, slik at man kan bestemme seg for hvilken klasse av likninger man i det hele tatt ønsker å ta i betraktning. I prinsippet består denne klassifiseringen av å skrelle vekk likninger som er for kompliserte til å løses.

Vektorfunksjoner

En *vektorfunksjon* er en funksjon $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$:

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

der alle komponentene er funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{C}$.

Eksempel 14.1. Funksjonen

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

tegner enhetssirkelen i $\mathbb{R}^2$. △

Eksempel 14.2. Funksjonen

$$\mathbf{f}(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

tegner enhetssirkelen i det komplekse planet $\mathbb{C}$. △

Eksempel 14.3. Funksjonen

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix} \qquad 0 \le t$$

tegner en oppadgående spiral i $\mathbb{R}^3$. Den starter i origo, og er uendelig lang. △

Eksempel 14.4. Funksjonen

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t \qquad t \in \mathbb{R}$$

tegner en den rette linjen utspent av vektoren

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^2$. △

Eksempel 14.5. Funksjonen

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \qquad t \in \mathbb{R}$$

tegner den delen av linjen i forrige eksempel som ligger i første kvadrant i $\mathbb{R}^2$. △

Definisjon. Vi definerer den deriverte av $\mathbf{f}$ som

$$\mathbf{f}'(t) = \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{bmatrix}.$$

Systemer av differensiallikninger

I dette kapitlet skal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

alltid være en reell matrise. Det blir mer enn komplisert nok. Et *førsteordens lineært og homogent system av differensiallikninger med konstante koeffisienter* er et sett med n likninger og n ukjente

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix}$$

På kortform skriver vi enkelt og greit

$$A\mathbf{y} = \mathbf{y}',$$

og forkorter den lange tittelen til *system.* For å løse dette systemet, skal vi bruke en teknikk som ligner på den du brukte når du løste andreordens differensiallikninger på gymnaset. Vi hoster enkelt og greit opp løsninger uten noen som helst forklaring på hvor det kommer fra, og viser etterpå at løsningene er korrekte. Vi begynner med den enkleste klassen av løsninger, nemlig de konstante.

Definisjon. En konstant funksjon som løser systemet $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$, kalles en *likevektsløsning.*

Teorem 14.6. *Alle* $\mathbf{x} \in \operatorname{Null} A$ *er likevektsløsninger av systemet* $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$.

Bevis. Siden $\mathbf{x}$ er konstant, er $\mathbf{x}' = 0$, og siden $\mathbf{x} \in \operatorname{Null} A$, er $A\mathbf{x} = 0 = \mathbf{x}'$. □

Nå tar vi en mer interessant klasse av løsninger.

Teorem 14.7. *Vektorfunksjonen*

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}e^{\lambda t}$$

er en løsning av systemet

$$A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

hvis og bare hvis λ *er en egenverdi, og* $\mathbf{x}$ *den korresponderende egenvektor, til matrisen* A.

Bevis. Vi beregner (husk at $e^{\lambda t}$ er en skalar)

$$A\mathbf{y} = A\mathbf{x}e^{\lambda t} = \lambda\mathbf{x}e^{\lambda t} = \left(\mathbf{x}e^{\lambda t}\right)' = \mathbf{y}'.$$

Omvendt kan vi se at dersom $\mathbf{x}e^{\lambda t}$ skal være en løsning av systemet, må

$$A\mathbf{x}e^{\lambda t} = \left(\mathbf{x}e^{\lambda t}\right)' = \lambda\mathbf{x}e^{\lambda t},$$

og hvis vi deler ut $e^{\lambda t} \neq 0$ får vi

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

som sier at $\mathbf{x}$ er en egenvektor med egenverdi λ. □

Merk. Dersom 0 er en egenverdi, blir den korresponderende egenvektoren en likevektsløsning, og dette er de samme likevektsløsningene som detter ut av nullrommet til A.

Eksempel 14.8. Vi løser systemet

$$A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

der

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorer er som kjent

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

med egenverdier 3 og 1, henholdsvis. Derfor er to løsninger av likningssystemet

$$\mathbf{y}_1 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t}. \qquad \triangle$$

Vi tar med en umiddelbar konsekvens av teoremet over.

Teorem 14.9. *Det er like mange løsninger på formen* $\mathbf{x}e^{\lambda t}$ *av*

$$A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

som antall lineært uavhengige egenvektorer til A.

Eksempel 14.10. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

har egenvektorer

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

med egenverdier henholdsvis 4, 9 og 0. Løsningene av $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ er

$$c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}, \quad c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{9t} \quad \text{og} \quad c_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

Siden både venstre- og høyresiden av systemet $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ er lineærtransformasjoner som tar inn vektoren $\mathbf{y}$, ser vi at lineærkombinasjoner av løsninger også er løsninger. Dette kalles *superposisjonsprinsippet*. Det er derfor naturlig å sette opp følgende definisjon. Av tekniske grunner som vi ikke skal gå inn på, må vi anta at A er diagonaliserbar.

Definisjon. Anta at A er en diagonaliserbar matrise. Vi definerer systemet $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ sin generelle løsning som

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{x}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{x}_2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n\mathbf{x}_n e^{\lambda_n t}$$

der $\mathbf{x}_k$ er egenvektorene til A, med korresponderende egenverdier λ_k.

Kommentar. Det går an å vise at for en reell og diagonaliserbar matrise, har vi fått med oss alle løsninger av systemet $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$. Men det er for hardt for oss.

Eksempel 14.11. Den generelle løsningen til systemet med matrise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

er

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{9t} + c_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

Kommentar. Dersom A ikke er diagonaliserbar finnes det andre typer løsninger, men de ikke så gode å skrive opp med det teoretiske rammeverket vi har bygget til nå. Vi skal senere gi et enkelt eksempel der A ikke er diagonaliserbar, for å gi en smakebit på hvordan det fungerer.

I noen tilfeller er det naturlig å spesifisere et punkt $\mathbb{R}^n$ der løsningskurven skal starte.

Definisjon. Et *initialverdiproblem* er et likningssystem

$$A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

med initialbetingelse

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

der $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. En løsning som tilfredsstiller dette kravet, kalles en *spesiell løsning*.

Eksempel 14.12. Den spesielle løsningen

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{9t} + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

til systemet i forrige eksempel, starter i punktet

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ved $t = 0$. $\triangle$

Forskjellige typer løsninger i planet

Løsninger av diagonaliserbare 2×2-systemer kan klassifiseres ganske greit. Vi skal også ta med et tilfelle der A ikke er diagonaliserbar, for å gi en smakebit på den generelle teorien. Det er gunstig å dele inn i forskjellige tilfeller basert på egenverdiene til A, se på hva som skjer når $t \to \infty$, og plotte noen løsninger i et *fasediagram*.

Reelle og distinkte egenverdier

Den generelle løsningen er

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{x}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{x}_2 e^{\lambda_2 t},$$

der både c_1, c_2, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ er relle. Vi illustrerer hva som kan skje med tre eksempler.

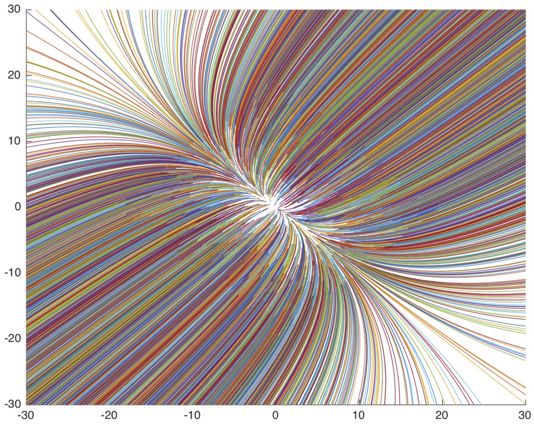
Eksempel 14.13. La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t}.$$

Merk at uansett hvilke kombinasjoner av c_1 og c_2 vi har, så lenge ikke begge er 0, vil alle løsninger reise mot uendelig når $t \to \infty$, altså vekk fra den eneste likevektsløsningen $\mathbf{y} = 0$. Vi sier derfor at $\mathbf{y}$ er en *ustabil likevektsløsning*. Nedenfor er plot av løsningskurver for et par tusen tilfeldige verdier av c_1 og c_2. △



Eksempel 14.13

Eksempel 14.14. La

$$A = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Merk at uansett hvilke kombinasjoner av c_1 og c_2 vi har, så lenge ikke begge er 0, vil alle løsninger søke mot origo når $t \to \infty$, altså inn mot likevektsløsningen $\mathbf{y} = 0$. Vi sier derfor at $\mathbf{y}$ er en *stabil likevektsløsning*. △

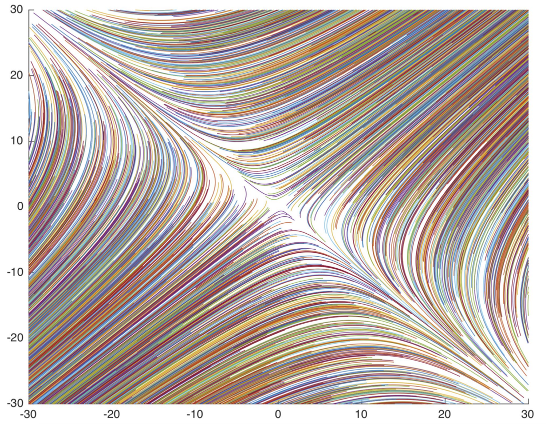
Eksempel 14.15. La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Merk at så lenge $c_1 \neq 0$, vil alle løsninger gå mot uendelig når $t \to \infty$, altså inn mot likevektsløsningen $\mathbf{y} = 0$. Men dersom $c_1 = 0$ og $c_2 \neq 0$, vil løsningen søke mot origo. Likevektsløsningen $\mathbf{y} = 0$ kalles derfor en *ustabil sadel*. △



Eksempel 14.15

Eksempel 14.16. La

$$A = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

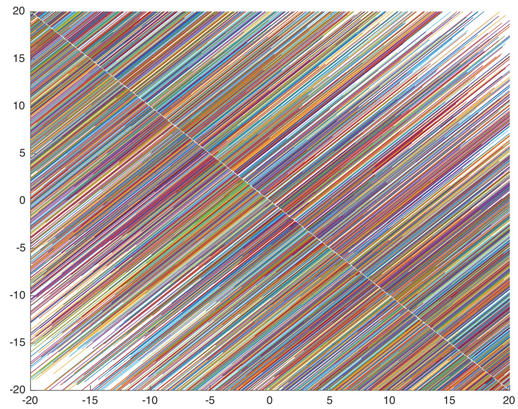
slik at

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Merk at så lenge $c_1 \neq 0$, vil alle løsninger søke mot likevektsløsningen

$$\mathbf{y} = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

og ingen mot $\mathbf{y} = 0$ når $t \to \infty$. △



Eksempel 14.16

Komplekse egenverdier

Vi har i øvingsopplegget vist at dersom en reell matrise har komplekse egenverdier, opptrer disse i komplekskonjugerte par. Du har kanskje lagt merke til at dette også gjelder for de respektive egenvektorene:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \Longleftrightarrow \quad A\overline{\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}$$

Dette skal vi benytte oss av for å plukke ut relle løsninger. La $\lambda = \alpha + \beta i$ ha egenvektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

og husk at $e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$, slik at

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= c_2\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2\\ &= c_1 e^{\lambda t}\mathbf{x} + c_2 e^{\overline{\lambda} t}\overline{\mathbf{x}}\\ &= c_1 e^{\alpha t}\left(\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix} + i\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}\right)(\cos\beta t + i\sin\beta t)\\ &\quad +c_2 e^{\alpha t}\left(\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix} - i\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}\right)(\cos\beta t - i\sin\beta t).\end{aligned}$$

Denne løsningen er pen på papiret, men vi ønsker å kunne visualisere litt, og da hadde det vært praktisk å finne en løsning som var reell istedet.

Siden $e^{\lambda t}\mathbf{x}$ og $e^{\overline{\lambda} t}\overline{\mathbf{x}}$ er lineært uavhengige for alle t, utgjør de en basis for $\mathbb{C}^2$. La oss søke en reell basis istedet. Vi kaller den nye basisen $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Velg først $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, og sett

$$\mathbf{v}_1 = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix} - \sin\beta t\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}\right).$$

Så velger vi $c_1 = -c_2 = \frac{1}{2i}$, og setter

$$\mathbf{v}_2 = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix} + \sin\beta t\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}\right).$$

Nå kan vi skrive

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2\\ &= d_1 e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix} - \sin\beta t\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}\right)\\ &\quad + d_2 e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix} + \sin\beta t\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

Merk at siden $\mathbf{y}_1$ og $\mathbf{y}_2$ er lineært uavhengige, og forholdet mellom disse og $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er gitt ved

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -i\\1 & i\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2\end{bmatrix},$$

er også $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ lineært uavhengige for alle t. Fordelen med den nye basisen er at vi nå enkelt kan skille ut alle reelle løsninger ved å holde oss til relle d_1 og d_2.

Eksempel 14.17. La

$$A = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

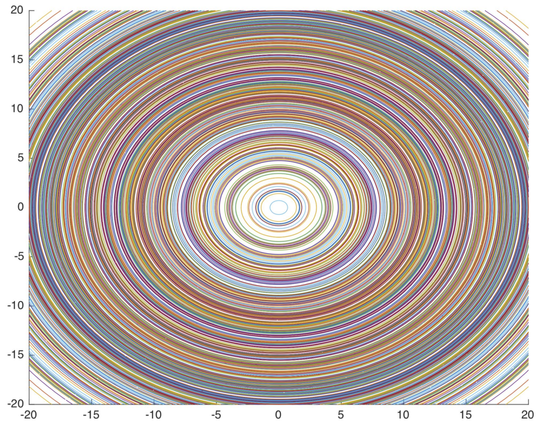
som har egenverdier $\pm i$ og egenvektorer

$$\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}.$$

Den generelle løsningen til systemet blir

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= d_1\left(\cos t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} - \sin t\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\\ &\quad + d_2\left(\cos t\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \sin t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)\\ &= d_1\begin{bmatrix}\cos t\\-\sin t\end{bmatrix} + d_2\begin{bmatrix}\sin t\\\cos t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\-\sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Vi ser at denne løsningen starter i punktet $\begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix}$ ved $t = 0$, og kjører deretter i en pen sirkulær bane om origo. Merk at kurven er traversert med klokken. △



Eksempel 14.17

Eksempel 14.18. La

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

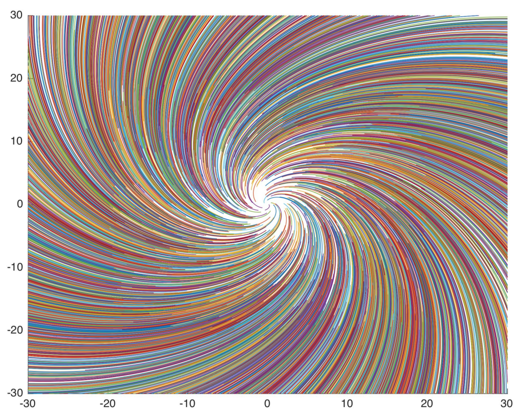
som har egenverdier $1 \pm i$ og de samme egenvektorene

$$\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}.$$

På samme vis som i forrige eksempel blir den generelle løsningen

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= d_1 e^t\begin{bmatrix}\cos t\\-\sin t\end{bmatrix} + d_2 e^t\begin{bmatrix}\sin t\\\cos t\end{bmatrix}\\ &= e^t\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\-\sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Denne løsningen starter i punktet $\begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix}$ ved $t = 0$, og kjører deretter i en særdeles vakker sirkulær og utadgående spiral. △



Eksempel 14.18

Eksempel 14.19. La

$$A = \begin{bmatrix}-1 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

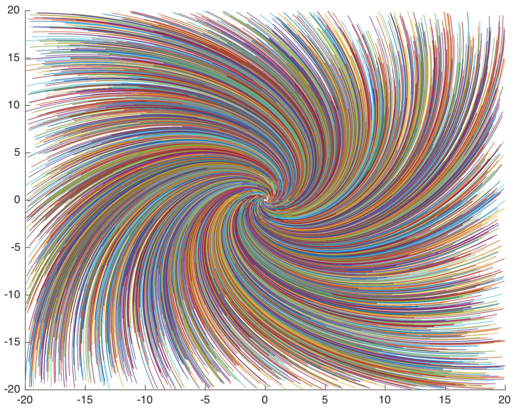
som har egenverdier $-1 \pm i$ og de samme egenvektorene

$$\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}.$$

På samme vis som i de to forrige eksemplene blir den generelle løsningen

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= d_1 e^{-t}\begin{bmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix} + d_2 e^{-t}\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}\\ &= e^{-t}\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1\\ d_2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Denne løsningen starter i punktet $\begin{bmatrix}d_1\\ d_2\end{bmatrix}$ ved $t=0$, og kjører deretter i en innadgående sirkulær spiral. $\triangle$



Eksempel 14.19

Dobbel egenverdi - for spesielt interesserte!

Dette tilfellet kan vi egentlig ikke analysere med teorien vi har lært til nå, så du skal slippe å kunne det til eksamen. Men vi klarer ikke motstå fristelsen til å bruke 2×2-matriser til å ta en smakebit på hva som skjuler seg utenfor pensum.

Eksempel 14.20. La

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

som har dobbel egenverdi 1, men bare en egenvektor $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$. Hva gjør vi nå? $\triangle$

For å løse knipen fra forrige eksempel, må vi gjøre noe artig, nemlig introdusere *generalisert egenvektor*. Egenvektoren til λ finner man ved å finne nullrommet til $A-\lambda I$. For en 2×2-matrise med defekt egenverdi, er en generalisert egenvektor en vektor i nullrommet til $(A-\lambda I)^2$.

Eksempel 14.21. La A være som i forrige eksempel. Nullrommet til

$$(A-I)^2 = \left(\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right)^2 = \left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

er alle vektorer i $\mathbb{C}^2$. Altså er alle vektorer i $\mathbb{C}^2$ generaliserte egenvektorer til matrisen A. Vi velger oss en tilfeldig vektor som ikke er parallell med $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$, for eksempel $\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$. Hvis vi ganger denne inn i $A-I$, får vi

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix},$$

som er en egenvektor. Hm. $\triangle$

Hvordan bruker vi dette til å løse systemet?

Eksempel 14.22. Vektorene $\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$ er et eksempel på en *kjede av generaliserte egenvektorer*. Løsningen som korresponderer til den genaliserte egenvektorkjeden $\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$ er

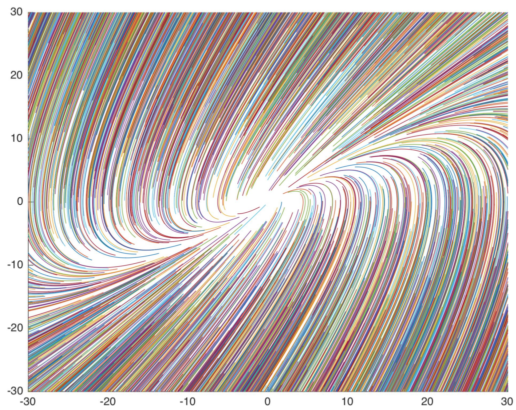
$$\mathbf{y}_2(t) = c_2 e^t\left(t\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\right).$$

Løsningen som korresponderer til egenvektoren vi fant tidligere, er

$$\mathbf{y}_1(t) = c_1 e^t\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.$$

Dette er to lineært uavhengige løsninger, og den generelle løsningen til systemet er

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^t\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} + c_2 e^t\left(t\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\right). \qquad \triangle$$



Eksempel 14.22

Oppgaver

1. Skissér faseplottet til systemet $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ når

a) $A = \begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix}7 & -1\\ 3 & 3\end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix}-3 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix}-3 & -9\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

2. Finn generell løsning av $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ når

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

3. Løs initialverdiproblemene $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ når

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. Løs initialverdiproblemet

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{y}', \quad \mathbf{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Vis at systemet

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

med en gitt initialverdi $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ har en entydig løsning.

Hint: Du kan anta at den generelle løsningen inneholder alle løsninger.

6.[Utfordring]
Husk at glatte funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er et vektorrom. På samme måte danner glatte vektorfunksjoner $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et vektorrom V med addisjon

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t),$$

og skalarmultiplikasjon

$$(c\mathbf{f})(t) = c\mathbf{f}(t).$$

a) Forklar hvorfor alle løsningene til et system $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ danner et underrom av V.

b) Hva er dimensjonen til rommet av alle løsninger til

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{y}'?$$

Hint: Bruk forrige oppgave.

15 Andre ordens lineære differensiallikninger

I matte 1 har du løst to typer differensiallikninger. Den ene er den første ordens lineære likningen

$$y' + f(t)y = g(t)$$

og den andre er den separable likningen

$$y' = f(y)g(t).$$

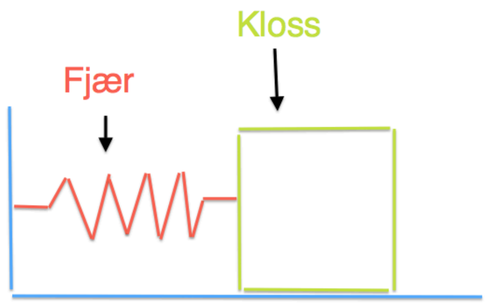
I dette kapitlet skal vi behandle lineære andreordens differensiallikninger med konstante koeffisienter:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

Det er vanlig å kreve at $y \in \mathcal{C}^2$, altså at y har to kontinuerlige deriverte. På denne måten kan man sikre at likningen faktisk gir mening. Det finnes mange situasjoner der dette kravet kan slakkes noe, men det er pensum i matte 4.

Hvor kommer andre ordens differensiallikninger fra?

En kloss sklir friksjonsfritt på underlaget, og er festet til veggen med en fjær. Hookes fjærlov sier at



$$F(y) = -ky,$$

der y er hvor langt fjæren er strukket eller komprimert, k er en konstant som avhenger av fjærens stivhet, og $F(y)$ er kraften fra fjæren på klossen. Dersom $y(t)$ er klossens posisjon, er klossens akselerasjon gitt ved $y''(t)$, og Newtons andre lov blir

$$-ky = my'',$$

der m er klossens masse. Dette er en differensiallikning. Vi skriver vanligvis

$$my'' + ky = 0.$$

Vi kan komplisere det litt til. La oss innføre luftmotstand. Luftmotstand avhenger kvadratisk av farten:

$$F(y') = b(y')^2;$$

der b er en proporsjonalitetskonstant som sier noe om luftmotstanden. Den totale kraften blir

$$F(y, y') = -ky + b(y')^2,$$

slik at Newtons andre lov gir

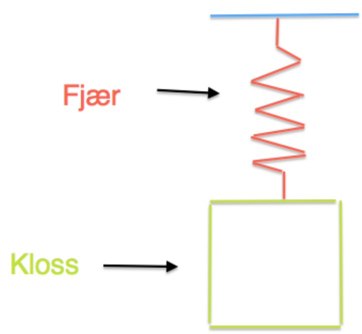
$$my'' - b(y')^2 + ky = 0.$$

Denne likningen har et problematisk ledd, $b(y')^2$. Men vi kan gjøre en forenkling. Dersom klossen ligger i en tyktflytende væske, blir motstanden proporsjonal med farten istedet for kvadratet av farten, og vi får likningen

$$my'' - cy' + ky = 0,$$

som er mye enklere å løse.

Nå skal vi komplisere det enda litt. La klossen henge fra taket. I tillegg til fjærkraften og luftmotstan-



den, vil nå også gravitasjonen påvirke bevegelsen. Gravitasjonskraften er en konstant kraft mg nedover. Den totale kraften er

$$F(y, y') = -ky + by' - mg,$$

og Newtons andre lov gir differensiallikningen

$$my'' - by' + ky = mg.$$

Noen småting

Vi skal behandle *andre ordens differensiallikninger med konstante koeffisienter*:

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

Det er vanlig å sette $a_2 = 1$, for å forenkle analysen. Vi slipper å ha med a_2 i alle formler og utledninger, og vi slipper å luke ut $a_2 = 0$ hver gang vi skal sette opp et teorem. Dersom a_2 skulle slumpe til å være noe annet enn 1, kan du dele den ut av likningen før du setter igang.

Det er tradisjonelt og praktisk å sortere likninger i to kategorier, de homogene:

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

og de inhomogene:

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

Løsningsteknikk for homogene likninger

Vi kaller gjerne løsningen av

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

for y_h, der h-en står for homogen. Det første man kan merke seg, er at vi har allerede lært å løse denne typen likning i forrige kapittel. Dersom vi innfører de nye variablene $v_1 = y$ og $v_2 = y'$, kan likningen skrives om til systemet

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}'$$

Vi vet derfor at vi kan forvente to lineært uavhengige løsninger. Det karakteristiske polynomet til matrisen er:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0.$$

Egenvektoren til λ er:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Den karakteristiske likningen kjenner du forhåpentligvis igjen fra gymnaset, der du lærte å løse disse likningene. Den gang sa de noe sånt som at alle løsninger var på formen $Ae^{\lambda t}$, og så satte de dette uttrykket inn i differensiallikningen for å utlede den karakteristiske likningen.

Vi kan bruke analysen fra forrige oppgave til å liste opp løsningen til den homogene likningen for forskjellige typer egenverdier. Merk at vi er i utgangspunktet kun interessert i v_1, og derfor ikke har bruk for egenvektorene når vi skal skrive opp løsninger.

Dersom $\lambda_1 \neq \lambda_2$ er reelle, kan vi plukke ut førstekomponenten av den generelle løsningen av systemet, og få

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Dersom $\lambda = \alpha \pm \beta i$, slik at

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix},$$

får vi

$$y_h(t) = d_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + d_2 e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Dersom $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, kan vi stokke litt om på verdiene til c_1 og c_2, og få

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}.$$

Eksempel 15.1. Løsningen til

$$y'' - y = 0$$

er

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}. \qquad \triangle$$

Eksempel 15.2. Løsningen til

$$y'' + y = 0$$

er

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t. \qquad \triangle$$

Eksempel 15.3. Løsningen til

$$y'' - 2y' + y = 0$$

er

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t. \qquad \triangle$$

Løsningsteknikk for inhomogene likninger

Tilsvarende kalles vi løsningen til

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

for y_p, der p står for partikulær. Vi gjør som vi pleier når vi lærer dere å løse likninger, og forteller enkelt og greit hva y_p er. La $y_h = y_1 + y_2$, der y_1 og y_2 være to lineært uavhengige homogene løsninger. Da er

$$\begin{aligned} y_p(t) &= y_2 \int \frac{y_1(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}\,dt \\ &\quad - y_1 \int \frac{y_2(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}\,dt. \end{aligned}$$

Integrasjonskonstanten i de ubestemte integralene skal være 0. Denne teknikken kalles *variasjon av parametre*.

Eksempel 15.4. Den homogene løsningen til

$$y'' - y = e^{2t}$$

er

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} = c_1 y_1(t) + c_1 y_2(t),$$

slik at

$$\begin{aligned} y_p(t) &= y_2 \int \frac{y_1(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}\,dt \\ &\quad - y_1 \int \frac{y_2(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}\,dt \\ &= e^{-t} \int \frac{e^t e^{2t}}{-e^t e^{-t} - e^{-t}e^t}\,dt \\ &\quad - e^t \int \frac{e^{-t}e^{2t}}{-e^t e^{-t} - e^{-t}e^t}\,dt = \frac{1}{3}e^{2t}, \end{aligned}$$

og

$$y = y_h + y_p = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}. \qquad \triangle$$

Eksempel 15.5. Den homogene løsningen til

$$y'' - y = e^t$$

er

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t},$$

slik at

$$\begin{aligned} y_p(t) &= e^{-t} \int \frac{e^t e^t}{-e^t e^{-t} - e^{-t}e^t}\,dt \\ &\quad - e^t \int \frac{e^{-t}e^t}{-e^t e^{-t} - e^{-t}e^t}\,dt = \frac{1}{2}(t-1)e^t, \end{aligned}$$

og

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2}(t-1)e^t. \qquad \triangle$$

Eksempel 15.6. Den homogene løsningen til

$$y'' + y = \sin t$$

er

$$y_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

slik at

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \sin t \int \frac{\cos t \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt \\ &\quad - \cos t \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt \\ &= \sin t \int \cos t \sin t\, dt - \cos t \int \sin^2 t\, dt \\ &= -\frac{1}{4} \sin t \cos 2t - \cos t \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \right) \\ &= -\frac{1}{2} t \cos t - \sin t. \end{aligned}$$

Merk at den homogene løsningen $y_1 = \sin x$ dukket opp i prosessen. Dette skjer av og til, men gjør ingenting. Vi har

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{2} t \cos t. \qquad \triangle$$

Apoteose

Til slutt kan vi registrere at den generelle løsningen til

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

er

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Merk at det finnes to ubestemte koeffisienter i y_h, så et initialverdiproblem trenger to betingelser - den vanligste formen er

$$y(t_0) = a, \quad y'(t_0) = b.$$

Eksempel 15.7. Løsningen til initialverdiproblemet

$$y'' - y = e^{2t}$$

med betingelser

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

er

$$y = \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}. \qquad \triangle$$

Oppgaver

1. Skriv om følgende andre ordens differensiallikninger til system.

a) $y'' - y = 0$

b) $y'' + 2y' + 3y = 0$

c) $y'' + y' = 0$

2. Finn generell løsning av

a) $y'' - y' - 2y = 0$

b) $y'' + y = 0$

c) $y'' - 4y' + 4y = 0$

3. Løs initialverdiproblemet

a) $y'' - y' - 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

b) $y'' + y = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

c) $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y(1) = 0,\ y'(0) = -e^{-2}$

4. Finn generell løsning av

a) $y'' - y' - 2y = e^{-2t}$

b) $y'' - y' - 2y = e^{2t}$

c) $y'' + y = t$

d) $y'' - 4y' + 4y = 4t$

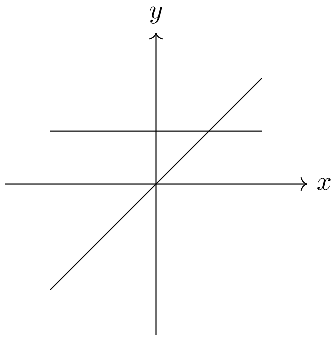
5. For alle likningene i oppgave **15.1.** skal du: regne ut det karakteristiske polynomet til differensiallikningen, og det karakteristiske polynomet til matrisen i tilhørende system. Ser du en sammenheng? Klarer du å bevise observasjonen din?

Løsninger på oppgaver

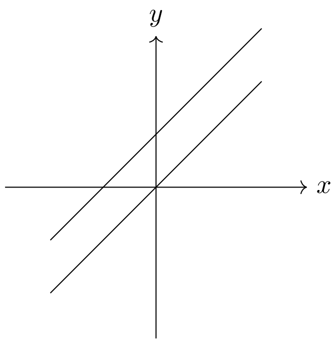
1.1. Likning (a) og (c) er lineære; (b) er ikke.

1.2. Det finnes mange eksempler som alle tilfredsstiller at

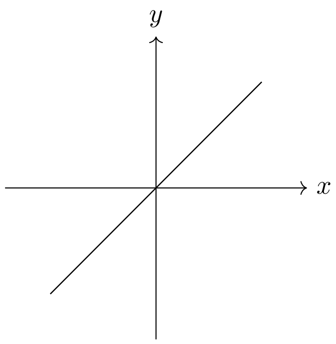
a) ... linjene skjærer hverandre i ett punkt:



b) ... linjene er parallelle:



c) ... linjene er helt like:



1.3.

a) En lineær likning med tre ukjente kan tegnes som ett plan i x–y–z-rommet.

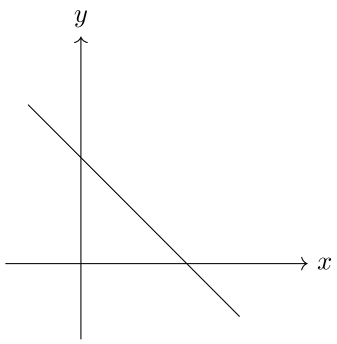
b) Likningen $z = 3$ svarer - geometrisk - til et plan som skjærer z-aksen normalt i $z = 3$. Vi gjenkjenner også

$$x + y + z = 5$$

som et plan i rommet. Begge likningene er oppfylt når planene skjærer hverandre. Ved å sette inn $z = 3$ i

$$x + y + 3 = 5$$

ser vi at $x + y = 2$. Løsningene ligger altså på linjen $x + y = 2$ i planet $z = 3$. Skisse av linjen sett ovenfra:



Prøv å skissere dette i x–y–z-rommet.

2.1. Matrise (a), (c) og (d) er på trappeform; (a) og (d) er på redusert trappeform.

2.2.

a) $x = \frac{5}{2}$, $y = 4$ og $z = -3$.

b) Radredusering viser at systemet har en fri variabel. Dette kan også observeres direkte ettersom siste likning er første likning multiplisert med to. Husk at vi nå har mange valg for å løse oppgaven, og vi gir derfor bare en skisse til hvordan du kan komme frem til et endelig svar. Eksempelvis kan vi ende opp med det ekvivalente systemet

$$\begin{cases} x + 3y + 6z = 4 \\ \qquad\ \ y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Nå kan vi velge y eller z som fri variabel. Prøv gjerne ulike valg. Du kan sjekke om løsningene dine er korrekt ved å sette inn i likningene du opprinnelig skulle løse.

c) Det finnes ingen løsning.

2.3. Likningssystemene er ekvivalente fordi begge har entydig løsning $x = 1$, $y = 1$ og $z = 1$.

2.4. Hint: Teorem 2.2 sier at radekvivalente totalmatriser alltid er ekvivalente som likningssystem, de har altså like løsninger. Det holder derfor å vise at de korresponderende likningssystemene har ulike løsninger.

Merk: Vi ser at den eneste forskjellen på matrisene er at første- og tredje kolonne har byttet plass. Dette svarer til at første- og siste variabel bytter plass i korresponderende likningssystem. Kan du forklare dette?

2.5.

a) Kravene $p(1) = 2$, $p(2) = 3$ og $p(3) = 5$ gir følgende likningssystem:

$$\begin{cases} a + \ \ b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 5 \end{cases}$$

b) Løsningen er $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ og $c = 2$.

c) Sett inn 1, 2 og 3 i polynomet $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$ for å se at kravene i **a)** er oppfylt.

2.6.

La 1 betegne mulig og 0 umulig:

	$m < n$	$m = n$	$m > n$
ingen løsninger	1	1	1
én løsning	0	1	1
uendelig mange løsninger	1	1	1

2.7. Løsningen er

$$x = \frac{1}{ad - bc}(dm - bn)$$
$$y = \frac{1}{ad - bc}(an - cm).$$

Merk at $ad - bc \neq 0$ ettersom vi har antatt $ad \neq bc$.

2.8.

a) M er trivielt radekvivalent med M.

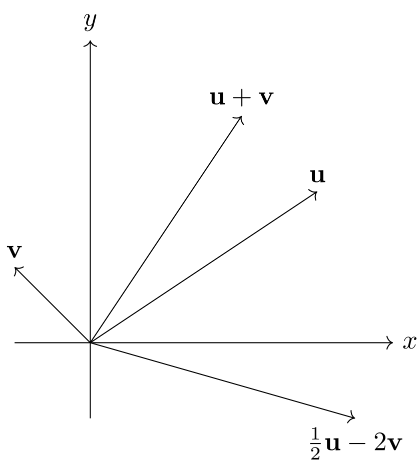
b) Hint: Alle radoperasjoner er reversible; multiplisere en rad med et ikke-null tall c kan reverseres ved å multiplisere samme rad med $\frac{1}{c}$; bytte om på to rader kan reverseres ved å bytte om på radene igjen; å legge til et multiplum av en rad til en annen kan reverseres ved å trekke fra det som ble lagt til. Dersom $M \sim N$ betyr det at vi har gjort et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_n$ for å lage N fra M. Klarer du, ut ifra dette, å finne et endelig antall radoperasjoner som lager M fra N?

c) Hint: Vi antar at det finnes et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_n$ som lager L fra M, og at det finnes et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_{n+1}, \ldots, \mathrm{O}_{n+m}$ som lager N fra L. Klarer du, ut ifra dette, å finne et endelig antall radoperasjoner som lager N fra M?

3.1.

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\frac{1}{2}\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$.

b)



3.2. Se diskusjonen om matrise- og vektorligninger i kapittel **3**.

3.3.

a) Det er fire frie variabler. Husk at du kan sjekke om det endelige svaret ditt er riktig ved å multiplisere med A og se om resultatet faktisk blir null-vektoren.

b) Det finnes ingen løsning.

c) $x = \frac{83}{215}$, $y = \frac{187}{215}$ og $z = \frac{156}{215}$.

3.4.

a) Et vilkårlig valg av en vektor vil kunne skrives som en lineærkombinasjon av de to andre. Det er derfor tre mulige fremgangsmåter som alle er riktig. Hint: La $\mathbf{v}_1$ være en av vektorene. Du ønsker å sjekke om $\mathbf{v}_1$ er en lineærkombinasjon av de to resterende vektorene. Dette kan formuleres med likningen

$$\mathbf{v}_1 = a\mathbf{v}_2 + b\mathbf{v}_3$$

hvor $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er de to resterende vektorene, og a og b er ukjente koeffisienter. Spørsmålet er altså om denne likningen har en løsning; som kan sjekkes ved regning. Prøv å skissere løsningen din i x–y-planet.

b) Et vilkårlig valg av en vektor vil kunne skrives som en lineærkombinasjon av de to andre. Fremgangsmåte som i **a)**, men merk at du ikke kan skissere løsningen din ettersom dette krever fire dimensjoner.

3.5.

a) Hint: Vi ønsker å finne en vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ som ikke er en lineærkombinasjon av $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$. Vektoren skal altså *ikke* tilfredstille likningen

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

som har totalmatrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & a \\ 5 & 18 & b \\ -3 & 4 & c \end{bmatrix}.$$

Radreduser og velg a, b og c slik at systemet ikke har løsning. Eksempelvis fungerer $a = 0$, $b = 1$ og $c = 0$.

b) Hint: Som i **a)**, men nå er totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 3 & 4 & b \\ 3 & 4 & 5 & c \\ 4 & 5 & 6 & d \end{bmatrix}.$$

c) Hint: Som i **a)**, men nå er totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 & a \\ -8 & -7 & 3 & b \\ -4 & 5 & -8 & c \\ -6 & 6 & -4 & d \end{bmatrix}.$$

3.6.

a) Spørsmålet gir ikke mening siden vektorene i **5. a)** er vektorer i $\mathbb{R}^3$.

b) Hint: Ligningen i **3. b)** har ingen løsning.

c) Hint: Ligningen i **3. c)** har én løsning.

3.7. Planet som inneholder $\begin{bmatrix}-3\\-7\\-3\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}8\\-8\\-4\end{bmatrix}$ er akkurat det lineære spennet deres. Altså, alle vektorer på formen

$$a\begin{bmatrix}-3\\-7\\-3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}8\\-8\\-4\end{bmatrix}.$$

Alle valg av a og b er riktig.

3.8. Tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ spenner ut et parallellepiped. Disse ligger i et plan hvis og bare hvis volumet til dette parallellepipedet - determinanten - er lik null. Derfor må vi finne en tredje vektor $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ slik at determinanten til $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ ikke er lik null. Matematisk formulert:

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-3\\-7\\-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}8\\-8\\-4\end{bmatrix}\neq 0.$$

Det finnes mange valg av a, b og c som fungerer. Eksempelvis fungerer $\begin{bmatrix}1\\-9\\20\end{bmatrix}$. Likningen $x\mathbf{u}+y\mathbf{v}+z\mathbf{w}=0$ har kun triviell løsning; $x=0$, $y=0$ og $z=0$.

3.9. Introduksjon til løsning: Vi ønsker å beskrive problemet med lineær algebra. Et polynom er entydig bestemt av koeffisientene sine. Derfor kan all informasjon om et andregradspolynom $p(x)=ax^2+bx+c$ lagres i vektoren $\mathbf{p}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$. Summen av to andregradspolynom

$$ax^2+bx+c$$

og

$$dx^2+ex+f$$

kan skrives

$$(a+d)x^2+(b+e)x+(c+f).$$

Vi summerer altså koeffisientene foran tilhørende potens av x. Dette svarer akkurat til addisjon av tilhørende vektorer:

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}d\\e\\f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+d\\b+e\\c+f\end{bmatrix}.$$

Tilsvarende blir en konstant multiplisert med et andregradspolynom multiplisert i hver koeffisient:

$$k\cdot(ax^2+bx+c)=(k\cdot a)x^2+(k\cdot b)x+(k\cdot c),$$

som svarer til skalarmultiplikasjon av tilhørende vektor:

$$k\cdot\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\cdot a\\k\cdot b\\k\cdot c\end{bmatrix}.$$

a) I dette lineær algebra-språket blir spørsmålet om $\mathbf{s}=\begin{bmatrix}1\\8\\2\end{bmatrix}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{p}=\begin{bmatrix}1\\5\\-3\end{bmatrix}$ og $\mathbf{q}=\begin{bmatrix}4\\18\\4\end{bmatrix}$. Spørsmålet er altså om likningen

$$x\begin{bmatrix}1\\5\\-3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}4\\18\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\8\\2\end{bmatrix},$$

som svarer til totalmatrisen

$$\begin{bmatrix}1&4&1\\5&18&8\\-3&4&2\end{bmatrix},$$

har en løsning. Svaret er nei.

b) Hint: I lineær algebra-språk skal du finne en vektor $\mathbf{t}$ slik at alle vektorer $\mathbf{r}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ og $\mathbf{t}$. La $\mathbf{t}$ være løsningen du fant i oppgave **3.5** del **a)**. Du kan nå sjekke at likningen

$$x\mathbf{p}+y\mathbf{q}+z\mathbf{t}=\mathbf{r}$$

har en entydig løsning for alle valg av vektorer $\mathbf{r}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$. Det tilhørende polynomet t - til $\mathbf{t}$ - er altså en løsning på oppgaven.

Merk: Grunnen til at $\mathbf{t}$ fungerer er at den er lineært uavhengig av $\mathbf{p}$ og $\mathbf{q}$. Derfor får vi tre lineært uavhengige vektorer som til sammen spenner ut $\mathbb{R}^3$.

3.10. Eksempel; $m=2$, $n=2$. En vektor i $\mathbb{R}^2$ spenner ut en linje, altså ikke hele $\mathbb{R}^2$. Dette generaliseres til $\mathbb{R}^n$, svaret er altså nei.
Hint: Dersom m vektorer, $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m$, spenner ut $\mathbb{R}^n$ betyr dette at vi alltid kan løse likningen $x_1\mathbf{v}_1+\cdots+x_n\mathbf{v}_m=\mathbf{b}$ hvor $\mathbf{b}$ er en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$. Dette svarer til m likninger med n ukjente hvor $m<n$. Kan et slikt system alltid ha løsning?
Merk: Senere skal vi se at m vektorer spenner ut et underrom av dimensjon $\leq m$, altså kan de ikke spenne ut hele $\mathbb{R}^n$ dersom $m<n$.

4.1.

a) Gir ikke mening.

b) $\begin{bmatrix}-36&7&13\\-24&0&6\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}-38&3&9\\14&11&5\\-16&-8&-36\end{bmatrix}$

d) Gir ikke mening.

e) Gir ikke mening.

f) $\begin{bmatrix}-11\\26\\-68\end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix}-290\\-192\end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\5&3\end{bmatrix}$

i) 69

4.2. $\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

4.3. Den første har ingen løsninger; den andre har uendelig mange løsninger.

4.4. Hint: Du kan sjekke om en $n \times n$-matrise er inverterbar hvis du prøver å finne den inverse ved regning. Dette koker altså ned til å radredusere $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$.

a) Ikke inverterbar.

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

c) Ikke inverterbar (den er ikke kvadratisk).

d) Ikke inverterbar.

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4.5. La $\mathbf{e}_i$ være vektoren med 1 i komponent i og null ellers. Husk at for en $n \times n$-matrise er $A\mathbf{e}_i$ kolonnevektor nummer i. Vi kan derfor løse **a)** og **c)** direkte; det er jo kolonnevektorene til A som er oppgitt. I del **b)** og **d)** må vi skrive ut likningene vi får, og deretter løse dem direkte. Eksempelvis, hvis vi skriver $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ og setter inn kravene fra del **b)** får vi

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_3 + a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dette er fire likninger med fire ukjente. Tilsvarende fremgangsmåte fungerer i **d)**, men nå er A en 3×3-matrise. Du kan sjekke om det endelige svaret ditt er korrekt; tilfredstiller A kravene i oppgaven?

4.6.

a) Uttrykk X og B ved kolonnevektorer: $X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$. Nå kan vi reformulere $AX = B$ som $\begin{bmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$. Vi skal altså løse likningene $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ og $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$. Dette kan selvfølgelig gjøres samtidig.

b) Likningen som korresponderer til den første kolonnen i B har uendelig mange løsninger; den andre har ingen løsning.

4.7.

a) La $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$. I forrige oppgave ble likningene for kolonnevektorene $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$ uavhengige. Vi kunne altså finne x_1 og x_3 uten at dette påvirket x_2 og x_4, og vice versa. Dette er ikke sant i denne oppgaven.

b) Innfør notasjon for elementene i matrisene: $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$. Totalmatrisen blir - med denne notasjonen - da

$$\begin{bmatrix} a_1 + b_1 & b_3 & a_2 & 0 & c_1 \\ b_2 & a_1 + b_4 & 0 & a_2 & c_2 \\ a_3 & 0 & a_4 + b_1 & b_3 & c_3 \\ 0 & a_3 & b_2 & a_4 + b_4 & c_4 \end{bmatrix}.$$

Merk: avhengig av hvordan du nummererte likningene kan du ha en totalmatrise hvor radene er byttet om på.

c) Med oppgitte matriser blir totalmatrisen fra **b)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

som har løsning $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{3}$ og $x_4 = \frac{1}{3}$. Løsningen er altså

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

4.8.

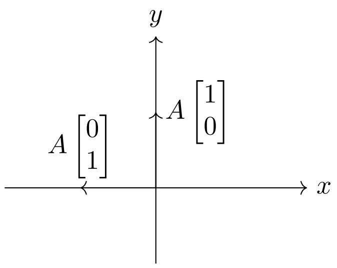
Vektoren må være på formen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ hvor a og b er reelle tall. Konstanten c kan være 0 eller 1. For $c = 1$ må $b = 0$ men vi kan velge a fritt. Dette svarer geometrisk til at vektorer som kun har komponent langs y-aksen blir null-vektoren ved multiplikasjon med A. For $c = 0$ må $a = 0$ men vi kan velge b fritt. Dette svarer geometrisk til at vektorer som kun har komponent langs x-aksen ikke påvirkes av multiplikasjon med A.

Hint: Vi ønsker at $A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, som gir likningene $a = c \cdot a$ og $0 = b \cdot c$. Det er nå to muligheter: 1) $c = 1$ og $b = 0$, eller 2) $c = 0$ og $a = 0$.

4.9.

a)

Vektorene blir rotert 90 grader mot klokken.



b) Del opp en vilkårlig vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ i vektoren $a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ langs x-aksen og $b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ langs y-aksen. Husk at

$$A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = aA \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + bA \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Fra **a)** ser vi at hver komponent av vektoren roteres 90 grader mot klokken. Altså roteres hele vektoren 90 grader mot klokken.

c) Den omvendte geometriske operasjonen er å rotere 90 grader med klokken. Derfor skulle man tro at det finnes en matrise som gjør dette og er inversen til A.

d) Inversen til A: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Du kan nå gjenta **a)-b)** med A^{-1} i stedet for A, og dermed sjekke at A^{-1} roterer en vektor 90 grader med klokken.

4.10.

a) Følger direkte fra definisjonen av matriseproduktet.

b) Hint: $A^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^\top \\ \mathbf{a}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^\top \end{bmatrix}$. Derfor blir

$$A^\top A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^\top \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^\top \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_2^\top \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^\top \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^\top \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n^\top \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^\top \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^\top \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

Hva er antagelsen i oppgaven? Kan du fullføre opgaven nå?

c) Matrisen A tilfredstiller kravene ettersom

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 1,$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 1,$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 0 \text{ og}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 0.$$

Inversen er derfor $A^{-1} = A^\top = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Du kan sjekke dette ved å bekrefte at både $AA^\top$ og $A^\top A$ er lik I.

5.1. Vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige og spenner ut $\mathbb{R}^2$.

Vektorene $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ og $\mathbf{w}_3$ er lineært avhengige og spenner ut $\mathbb{R}^2$.

5.2.

a) Radreduser matrisen med oppgitte vektorer som kolonner eller sjekk direkte at det ikke finnes noe tall c slik at:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) Lik fremgangsmåte som oppgave 5 kapittel 3. Merk: Å finne en vektor som er lineært uavhengig av vektorene i **a)** svarer altså til å finne en vektor som ikke er en lineærkombinasjon av vektorene i **a)**.

c) Teorem 5.12 gir at de tre vektorene spenner ut $\mathbb{R}^3$.

Vektoren du fant i **b)** løser oppgave **9. b)** kapittel 3; husk at informasjonen om et andregradspolynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ kan lagres – entydig – i en vektor

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

5.3.

a) Ved å radredusere matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ser vi at vi får en fri variabel dersom vi prøver å løse $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Eller ekvivalent har vi ikke et pivotelement i hver kolonne. Teorem 5.7 sier da at vektorene er lineært avhengige.

b) Lik fremgangsmåte som i del **b)** av forrige oppgave.

c) Du kan sjekke at to vilkårlige vektorer fra **a)** og vektoren du fant i **b)** er lineært uavhengige. Det er altså tre lineært uavhengige vektorer i det lineære spanet til vektorene i **a)** og **b)**. Derfor spenner vektorene $\mathbb{R}^3$ (Teorem 5.12).

5.4. Påstand **a)** og **b)** er usanne; **c)** er sann.
Merk: **a)** er *nesten* riktig. Tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige dersom

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

kun har triviell løsning; $a = 0$, $b = 0$ og $c = 0$. Lineær avhengighet er det motsatte, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært avhengige dersom

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

har en ikke-triviell løsning; kan ta en av a, b og c ulik null. Dette er ekvivalent med at *en* av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av de to andre (del likningen med den koeffisienten som ikke er lik null). Påstanden i oppgaveteksten er at $\mathbf{u}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$. Men dette kan vi ikke garantere! Et eksempel: La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$ (en vilkårlig vektor langs y-aksen). Nå er de tre vektorene lineært avhengige i $\mathbb{R}^2$, men det finnes ikke a og b slik at $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$ fordi $\mathbf{u}$ ligger på x-aksen og de to andre ligger på y-aksen. Merk også at $\mathbf{w} = y\mathbf{v} + 0\mathbf{u}$ i dette tilfellet; $\mathbf{w}$ kan altså skrives som en lineærkombinasjon av de to andre.

5.5.

a) Påstanden er usann. Et veldig enkelt moteksempel:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Påstanden er sann. Bevis:

Anta at vektorene $A\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $A\mathbf{v}_t$ er lineært uavhengige. Vi skal vise at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_t$ også er lineært uavhengige.

Se på likningen

$$\mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_2 x_2 + \cdots \mathbf{v}_t x_t = \mathbf{0}.$$

Anta at $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ er en løsning av denne likningen, altså at

$$\mathbf{v}_1 a_1 + \mathbf{v}_2 a_2 + \cdots \mathbf{v}_t a_t = \mathbf{0}.$$

Da får vi:

$$\begin{aligned}(A\mathbf{v}_1)a_1 + (A\mathbf{v}_2)a_2 + \cdots + (A\mathbf{v}_t)a_t \\ = A(\mathbf{v}_1 a_1 + \mathbf{v}_2 a_2 + \cdots + \mathbf{v}_t a_t) \\ = A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Men siden vi har antatt at $A\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2$, ..., $A\mathbf{v}_t$ er lineært uavhengige, betyr dette at vi må ha

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_t = 0.$$

Nå kan vi oppsummere det vi har gjort. Vi startet med å si at $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ er en løsning av likningen

$$\mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_2 x_2 + \cdots \mathbf{v}_t x_t = \mathbf{0},$$

og konkluderte med at da må alle a-ene være 0. Det betyr at denne likningen kun har den trivielle løsningen, og dermed er vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_t$ lineært uavhengige.

6.1.

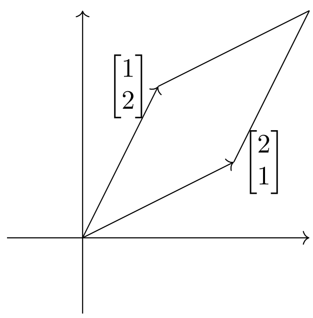
a) Determinanten er 0, kolonnene er lineært avhengige.

b) Determinanten er -3, kolonnene er lineært uavhengige.

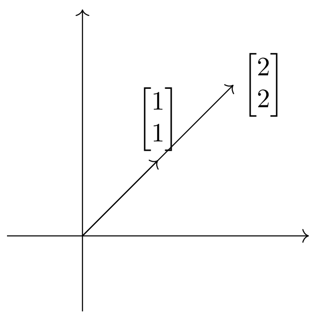
c) Determinanten er -14, kolonnene er lineært uavhengige. (Her kan det være lurt å bruke radoperasjoner for å beregne determinanten.)

6.2.

a) 3



b) 0



6.3. 430
Hint: Velg et referansepunkt og se på differansen fra de andre vektorene. Du har nå tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ som definerer T. Observer at T er en sjettedel av volumet til parallellepipedet definert av vektorene.

6.4. Vi kan anta at vinklene θ og φ ligger i intervallet $[-\pi, \pi)$.

a) Det er kun vinkelen φ som har noe å si for om determinanten er positiv, negativ eller 0. Determinanten er 0 hvis φ er 0 eller $-\pi$, og ellers har determinanten samme fortegn som φ.

b) Hvis vi øker α_1 eller α_2, så øker determinanten; hvis vi minsker en av disse, så minker determinanten.
Hvis vi varierer φ innenfor intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$, så øker determinanten når φ øker. I intervallene $[-\pi, -\pi/2]$ og $[\pi/2, \pi)$ er det omvendt.
Å variere θ har ingen effekt på determinanten.

c) $\det A = \alpha_1 \alpha_2 \sin\varphi$

6.5.

a) $bcxy$

b) Vi må ha at b, c, x og y alle ikke er lik null.

6.6.

a) Sant.
Hint: En matrise er inverterbar hvis og bare hvis determinanten ikke er lik null. Vi vet også at $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Vi har antatt at $\det(AB) \neq 0$. Kan du fullføre beviset?

b) Sant.
Hint: $AA^{-1} = I$ og $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

c) Usant.

d) Sant. Produktregelen for determinant gir:

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) = (\det B)(\det A) = \det(BA)$$

6.7. Determinanten må være lik null.
Hint: Vi antar at $A\mathbf{u} - A\mathbf{v} = 0$ for $\mathbf{u} - \mathbf{v} \neq 0$. Ved regnereglene for matriser blir dette $A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0$. Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har altså en ikke-triviell løsning; $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Dette betyr – fra Teorem 5.7 – at kolonnene til A er lineært avhengige. Hva kan du nå si om determinanten til A?

6.8. $m \geq n$.
Skisse til løsning: Hva skjer hvis vi antar $m < n$?
Svar: Siden kolonnene til A er vektorer i $\mathbb{R}^n$ og vi har $n > m$ vektorer, må kolonnene til A være lineært avhengige. Husk at

$$A^\top A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^\top \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^\top \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_2^\top \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^\top \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^\top \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n^\top \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^\top \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^\top \mathbf{a}_n \end{bmatrix},$$

hvor $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ er kolonnene til A. Du kan nå bruke at kolonnene til A er lineæret avhengige til å argumentere for at kolonnene til $A^\top A$ er lineært avhengige. Derfor må determinanten være lik null.

6.9. $\det(A \cdot A^\top) = 936$, $\det(A^\top \cdot A) = 0$.

7.1. I svarene nedenfor vil vi liste opp egenvektorer, og deretter egenrommet til hver egenverdi i samme rekkefølge.

a) Egenverdier: 3, -1. Egenrom: linjen utspent av $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$.

b) Egenverdier: 3, -1, 0. Egenrom: Linjen utspent av $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

c) Egenverdi: 0. Egenrom: Linjen utspent av $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

Merk: Dette er et eksempel på at geometrisk multiplisitet er strengt mindre enn algebraisk multiplisitet.

d) Egenverdi: 3, 8. Egenrom: Planet utspent av $\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$, linjen utspent av $\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$.

: Merk: Dette er et eksempel på at egenvektorer med lik egenverdi kan være lineært uavhengige.

7.2.

a) Egenverdi: 0,1. Egenrom: x-aksen og y-aksen.

b) Vektorer langs y-aksen blir null-vektoren ved multiplikasjon av A; vektorer langs x-aksen er uendret ved muliplikasjon av A.

7.3.

a) Egenverdi: 0,1. Egenrom: linjene utspent av $(1,1)$ og $(-1,1)$.

b) Vektorer langs $(1,-1)$-linjen blir null-vektoren ved multiplikasjon; vektorer langs $(-1,1)$-linjen er uendret ved muliplikasjon.

Merk: Man kan tolke x-aksen som linjen utspent av $(1,0)$ og y-aksen som linjen utspent av $(-1,1)$. Dette er altså helt lik situasjonen som i forrige oppgave, men nå er egenrommene rotert med 45 grader.

7.4.

a) Dersom vi prøver å løse $\det(A-\lambda I)=0$ får vi polynomlikningen $\lambda^2+1=0$. Denne har ingen (reelle) løsninger.

b) Matrisen roterer vektorer med -90 grader. Men en likning på formen $A\mathbf{x}=c\mathbf{x}$ betyr at A skalerer $\mathbf{x}$ med en faktor c uten at $\mathbf{x}$ roteres.

7.5.

a) $\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{bmatrix}$

b) Matrisen er akkurat den som har svaret i del **a)** som kolonner:

$$T_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

c) Matrisen T_0, som roterer med 0 radianer, har egenverdien 1. (Denne matrisen er bare identitetsmatrisen I_2.)

Matrisen T_π roterer hele planet en halv omdreining og sender derfor enhver vektor $\mathbf{v}$ til vektoren $-\mathbf{v}$. Denne matrisen har egenverdien -1.

(Dermed får vi også egenverdien 1 ved å velge en hvilken som helst vinkel på formen $0+2\pi n$, og vi får egenverdien -1 ved å velge en hvilken som helst vinkel på formen $\pi+2\pi n$, der n er et heltall.)

Hvis vi roterer med en annen vinkel enn 0 eller π, kan vi ikke få noen egenverdi, fordi vi da sender en vektor $\mathbf{v}$ til en vektor som ikke ligger på samme linje gjennom origo som $\mathbf{v}$ gjør.

7.6.

a) Feil. Vi får generelt et n-tegradspolynom som kan ha alt fra null til n løsninger (det er maksimalt n egenverdier). Det har vært mange eksempler på dette tidligere i øvingen.

b) Sant. Vi har – per definisjon – en ikke-null vektor $\mathbf{x}$ som tilfredsstiller $A\mathbf{x}=c\mathbf{x}$ hvor $c\neq 0$. Derfor har vi funnet en vektor $\mathbf{x}$ slik at $A\mathbf{x}$ ikke er lik null-vektoren. Men da kan A umulig være null-matrisen; hvis alle elementene i A var lik null ville $A\mathbf{x}$ vært lik null for alle valg av $\mathbf{x}$.

c) Sant. Det er et eksempel i en tidligere oppgave.

7.7. Hint: Egenverdiene til A er løsninger på polynomet $\det(A-\lambda I)=0$. Tilsvarende er egenverdiene til $A^\top$ løsninger på polynomet $\det(A^\top-\lambda I)=0$. Observer at $(A-\lambda I)^\top=A^\top-\lambda I$. Bruk hintet i oppgaveteksten på matrisen $B=A-\lambda^\top$.

7.8.

a) Egenverdier: 1, 2, -5, 77.

Hint: Hva er determinanten til en matrise på trappeform?

b) Alle egenrommene blir éndimensjonale. Her er, for hver egenverdi λ_i, en egenvektor $\mathbf{v}_i$ som utspenner egenrommet til λ_i:

λ_i	1	2	-5	77
$\mathbf{v}_i$	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-5\\-6\\14\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}77\\76\\0\\1425\end{bmatrix}$

c) Nei. Vi må løse en fjerdegradslinking, som kan bli meget vanskelig. For generell n: Nei; vi må løse n-tegradslikninger.

7.9.

a) Vi vet at nullvektoren per definisjon ikke er en egenvektor. Vi ganger A med hver av de andre vektorene, og ser hva vi får:

$$A\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20\\40\\60\\80\end{bmatrix} = 20\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}3\\2\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}102\\74\\66\\18\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}28\\6\\4\\2\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}2\\1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}40\\20\\40\\60\end{bmatrix} = 20\begin{bmatrix}2\\1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}3\\2\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}120\\80\\40\\80\end{bmatrix} = 40\begin{bmatrix}3\\2\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}160\\120\\80\\40\end{bmatrix} = 40\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$$

Vi fant fire egenvektorer, tilhørende de to egenverdiene 20 og 40. Vi ser ganske lett at de to vektorene

$$\begin{bmatrix}3\\2\\2\\1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

ikke er egenvektorer.

b) La

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\2\\3\end{bmatrix}$$

være egenvektorene fra del (a) som hører til egenverdien 20, og la

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}3\\2\\1\\2\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$$

være egenvektorene fra del (a) som hører til egenverdien 40. Du kan sjekke at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige (ingen av dem er en skalar ganger den andre) og at $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$ er lineært uavhengige. Det betyr at

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{w}_1 \text{ og } \mathbf{w}_2$$

er lineært uavhengige, siden vi vet at det ikke kan finnes lineære avhengigheter mellom egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier (teorem 7.15 (a)).

(Merk at det er nødvendig å først sjekke at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige og at $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$ er lineært uavhengige. Du kan ikke bare bruke teorem 7.15 (a) direkte på alle de fire vektorene, fordi de ikke hører til fire forskjellige egenverdier.)

Hvis det nå finnes en vektor $\mathbf{u}$ som enten

1. … er en egenvektor tilhørende 20 som ikke ligger i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, eller
2. … er en egenvektor tilhørende 40 som ikke ligger i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, eller
3. … er en egenvektor som tilhører en annen egenverdi enn 20 eller 40,

så får vi at

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2 \text{ og } \mathbf{u}$$

er fem lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^4$. Det er ikke mulig, så det kan ikke finnes noen slik vektor $\mathbf{u}$.

Dette betyr at vi har funnet alle egenverdier og egenvektorer for A, og de er:

Egenverdien 20 med egenrom $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$
Egenverdien 40 med egenrom $\mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$

7.10. Full løsning: Hvis c er en egenverdi tilfredsstiller den – per definisjon – $A\mathbf{x} = c\mathbf{x}$ for en ikke-null vektor $\mathbf{x}$. Kombiner dette med antagelsen om at $A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ for å se at $\mathbf{x}$ tilfredsstiller $c^2\mathbf{x} = c\mathbf{x}$. Omformuler denne likningen til $(c^2-c)\mathbf{x} = 0$. Ettersom $\mathbf{x}$ ikke er null-vektoren, må en komponent i $\mathbf{x}$ ikke være lik null (hvorfor?), og derfor må $c^2 - c = 0$. Dette er en andregradslikning med løsning $c = 0$ eller $c = 1$.

7.11.

a) Vi vet at egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier er lineært uavhengige, og da følger det fra teorem 6.11 at matrisen V er inverterbar.

b) Vi regner ut

$$\begin{aligned}
V^{-1}AV &= V^{-1}\begin{bmatrix}A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & \cdots & A\mathbf{v}_n\end{bmatrix}\\
&= V^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}V^{-1}\lambda_1\mathbf{v}_1 & V^{-1}\lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & V^{-1}\lambda_n\mathbf{v}_n\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\lambda_1V^{-1}\mathbf{v}_1 & \lambda_2V^{-1}\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_nV^{-1}\mathbf{v}_n\end{bmatrix}\\
&= D\begin{bmatrix}V^{-1}\mathbf{v}_1 & V^{-1}\mathbf{v}_2 & \cdots & V^{-1}\mathbf{v}_n\end{bmatrix}\\
&= DV^{-1}V\\
&= D,
\end{aligned}$$

der

$$D = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

er diagonalmatrisen bestående av egenverdiene til A.

Da kan vi dessuten legge merke til at vi har

$$A = VV^{-1}AVV^{-1} = VDV^{-1}.$$

(Oppgaven spurte ikke om dette, men det er likevel en interessant observasjon, og den hjelper oss med å løse neste deloppgave.)

c) Lag en diagonalmatrise D med egenverdiene på diagonalen, og en matrise V med egenvektorene som kolonner:

$$D = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad V = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 6 & 4\\ 2 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

Da ser du fra del (b) at matrisen $A = VDV^{-1}$ oppfyller kravene i oppgaven. Regn ut inversen til V på vanlig måte; da får du:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nå kan du gange sammen matrisene og ende opp med:

$$A = VDV^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -36 & 9 & 6 \\ -22 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

8.1.

a) Merk at matrisen A allerede er på redusert trappeform, så vi trenger ikke gausseliminere.

Matrisen har fire frie variabler og tre pivotelement. Dimensjonen på nullrommet er derfor lik fire, mens dimensjonen på kolonnerommet (og derfor også radrommet) er lik tre. For å finne en basis holder det å finne fire lineært uavhengige vektorer i nullrommet og tre lineært uavhengige vektorer i kolonnerommet (og radrommet).
Eksempel på valg av basis: Du kan ta kolonnene og radene som svarer til pivotelementene for å finne basis for kolonne- og radrommet; kolonnene som svarer til pivotelement er alltid lineært uavhengige, og vi har tre slike kolonner. Basis for kolonnerommet: kolonne 2, 5 og 6. Basis for radrommet: rad 1, 2 og 3. Matrisen er allerede radredusert, og likningene for nullrommet er:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_7 &= 0 \\ x_5 + x_7 &= 0 \\ x_6 + x_7 &= 0 \end{aligned}$$

Vi kan ta $x_1 = q$, $x_3 = r$, $x_4 = s$ og $x_7 = t$ som frie variabler. Da får vi følgende parametrisering av nullrommet:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q \\ -r-t \\ r \\ s \\ -t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Dette betyr at

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

er en basis for nullrommet.

b) Gausseliminering av matrisen B til redusert trappeform gir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Her er det pivotelementer i de to første kolonnene, så

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$$

er en basis for kolonnerommet. Vi får en basis for radrommet ved å ta de radene som ikke er null i trappeformmatrisen (dette ville også fungere om vi bare har trappeform, og ikke redusert trappeform), så

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

er en basis for radrommet. Både radrommet og kolonnerommet har dimensjon 2.

Nullrommet består av alle løsninger av likningen $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi ser at generell løsning av denne likningen blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t \qquad \text{der } t \text{ er et vilkårlig reelt tall.}$$

Dermed er

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

en basis for nullrommet. Nullrommet har dimensjon 1.

c) Vektoren ligger i nullrommet fordi

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

d) Vektoren ligger ikke i kolonnerommet til A fordi systemet med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

umulig kan ha løsning; den siste raden svarer til likningen $0 = -1$.

Vektoren ligger i kolonnerommet til B; du kan sjekke at likningssystemet med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \end{array}\right]$$

har løsning.

8.2.

a) Vi kan for eksempel velge $(1, x, x^2)$. En basis er – per definisjon – en liste med vektorer som spenner ut rommet og er lineært uavhengige.

Spenner ut: En vilkårlig vektor $a+bx+cx^2$ er trivielt en lineærkombinasjon $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2$ av 1, x og x^2.
Lineært uavhengige: Gitt en likning $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$, så må vi vise at vi kun har triviell løsning. Men et andregradspolynom kan maksimalt ha to nullpunkt, altså kan likningen umulig holde hvis ikke $a = 0$, $b = 0$ og $c = 0$; vi har kun triviell løsning.

b) I koordinatene til basisen vi valgte i **a)** svarer et polynom $a_0 + a_1x + a_2x^2$ til vektoren $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$. Spesielt blir $1 + 2x + 3x^3$ vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
Merk: Du innførte koordinater for å løse oppgave **3.9.**

8.3.

a) Nei, det er ikke et underrom, for nullvektoren er ikke med.

b) Ja, det er et underrom.

Det kan være lurt å legge merke til at vektoren $\mathbf{v}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$$

Dette betyr at vi isteden kan se på mengden av alle vektorer på formen

$$s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2$$

og få den samme mengden. Nå er det lett å sjekke at kriteriene for å være underrom er oppfylt:

1. Nullvektoren er med i mengden vår (vi får nullvektoren ved å velge $s = t = 0$).
2. Summen av to vektorer som er med i mengden er også med i mengden:
$$(s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2) + (s'\mathbf{a}_1 + t'\mathbf{a}_2) = (s+s')\mathbf{a}_1 + (t+t')\mathbf{a}_2$$
3. Om vi ganger en vektor i mengden med en skalar c, får vi igjen en vektor i mengden:
$$c \cdot (s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2) = (cs)\mathbf{a}_1 + (ct)\mathbf{a}_2$$

c) Vektoren $\mathbf{u}$ ligger ikke i kolonnerommet, men vektoren $\mathbf{v}$ gjør det. Merk at kolonnerommet til A er nøyaktig det underrommet av $\mathbb{R}^3$ som ble beskrevet i del **b)**.

8.4.

a) Usant. For eksempel får vi $\dim \operatorname{Col} A = 0$ hvis A er nullmatrisen.

b) Sant. Matrisen A består av n kolonnevektorer i $\mathbb{R}^m$ hvor $n > m$. Kolonnevektorene må derfor være lineært avhengige.

8.5. Snittet er et underrom; unionen er ikke nødvendigvis et underrom.
Union: Det er mange moteksempler. Du kan f. eks ta to linjer i $\mathbb{R}^2$ som kun krysser hverandre i origo.
Snitt: U_1 og U_2 inneholder null og er lukket under vektorromsoperasjonene. Husk at $U_1 \cap U_2$ betyr U_1 og U_2. Null-vektoren ligger i U_1 og U_2 og derfor i $U_1 \cap U_2$; summen av to vektorer i $U_1 \cap U_2$ ligger i både U_1 og U_2 igjen (U_1 og U_2 er underrom); et skalarmultiplum av en vektor i $U_1 \cap U_2$ ligger i både U_1 og U_2 igjen (U_1 og U_2 er underrom).

8.6.

a) La $M_{i,j}$ være $m \times n$-matrisen som har 1 i posisjon (i, j) og 0 ellers. Samlingen $M_{i,j}$, $i = 1, \ldots m$, $j = 1, \ldots n$ er en basis. Dimensjonen er antall element i en basis: mn.

b) U og W er underrom; V er ikke.

c) Basis for U: Matrisene $M_{i,i}$ for $i = 1, \ldots, n$.
Dimensjonen til U: n
Basis for W: Matrisene $M_{i,j} + M_{j,i}$ for $i \neq j$ og $M_{i,i}$ for $i = j$.
Hint: Element (i, j) må være likt som element (j, i) for symmetriske matriser, derfor inneholder $M_{i,j} + M_{j,i}$ akkurat den informasjonen du trenger.
Dimensjonen til W: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (vi trenger bare å telle elementene langs og under diagonalen).

8.7.

a) Vektorrommene $\mathcal{P}_n$, for forskjellige n, er underrom av hverandre:

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \cdots$$

Vektorrommene $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, for forskjellige n, også underrom av hverandre:

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^3(\mathbb{R}) \supset \cdots$$

For hver n har vi:

$$\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$$

Alle n-tegradspolynomer er polynomer; alle polynomer er uendelig mange ganger deriverbare; alle uendelig mange ganger deriverbare funksjoner er deriverbare n ganger; alle n ganger deriverbare funksjoner er kontinuerlige (deriverbar impliserer kontinuitet).

b) Du har vist at $\mathcal{P}_n$ har en endelig basis tidligere, og det er derfor endeligdimensjonalt. Vi har sett at $\mathcal{P}$ er uendeligdimensjonalt i notatet. Derfor er resten av vektorrommene uendeligdimensjonale; alle har et uendeligdimensjonalt underrom.

8.8. Ja, V er et vektorrom.

Additiv identitet: $\boxed{1}$, Additiv invers: $\boxed{1/a}$. Du kan nå sjekke aksiomene (V1)–(V8)

Hint: Parantes betyr hva man skal regne ut først.

8.9.

a) Nei.
$\mathbb{Z}$ er ikke lukket under skalarmultiplikasjon: Hvis du multipliserer et heltall med et reelt tall får du ikke nødvendigvis et heltall. Eksempel: $\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$ er ikke et heltall.

b) Nei.
Du kan for eksempel sjekke at $(ab) * n \neq a * (b * n)$ for alle valg av relle tall a og b, og heltall n.

Eksempel: $\lfloor \frac{1}{2} \cdot 1 \rfloor = 0$ slik at $2 * (\frac{1}{2} * 1) = 0$. Men

$$(2 \cdot \frac{1}{2}) * 1 = 1 * 1 = 1.$$

Merk: Vi viste altså at $\mathbb{Z}$ med denne skalarmultiplikasjonen umulig kan være et vektorrom. Mer generelt kan man vise at det ikke finnes noen vektorromstruktur på $\mathbb{Z}$. Dette henger sammen med at noen typer uendelig er større enn andre.

8.10. Vektorrommet må bestå av ett element; nullvektoren. Med en gang det finnes en ikke-null vektor $\mathbf{v}$ får vi uendelige mange vektorer; $t\mathbf{v}$ hvor t er et tall.

8.11. Det holder å vise at egenrommet til λ er lukket under vektorromsoperasjonene og inneholder nullvektoren.
Null-vektoren: Dette følger direkte fra definisjonen (egenrommet til λ består av egenvektorene og nullvektoren).
Addisjon: Hvis $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er to vektorer i egenrommet til λ har vi per definisjon at $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ og $A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$ (i spesialtilfellet $\mathbf{0}$ har vi alltid $A\mathbf{0} = \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$). Vi må vise at $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ er en egenvektor til λ:

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}),$$

$\mathbf{x} + \mathbf{y}$ er altså i egenrommet.
Skalarmultiplikasjon: Hvis $\mathbf{x}$ er i egenrommet til λ og c er en konstant har vi at

$$A(c\mathbf{x}) = c(A\mathbf{x}) = c(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x}),$$

som betyr at $c\mathbf{x}$ ligger i egenrommet til λ.

8.12.

a) For å svare på spørsmålet må vi utforske om det finnes konstanter a, b og c slik at

$$a\cos(x) + b\sin(x) + c\tan(x) = 0$$

for alle x i D. Velg $x = 0$ for å se at $a = 0$ ettersom $\sin(0) = 0$ og $\tan(0) = 0$. Vi har $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ som gir likningen

$$b\sin(x) = -c\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

for alle x i D . Sinus er aldri null for $x \neq 0$ i D slik at vi kan stryke $\sin(x)$ – på denne delen av D – og få likningen

$$\cos(x) = \frac{-c}{b}.$$

Men Cosinus er helt klart ikke konstant for alle $x \neq 0$ i D, så det kan ikke finnes noen ikke-trivielle løsninger. Vektorene er altså lineært uavhengige.

b) Ja.
Eksempel på løsning: La E være ett punkt i D (du kan velge dette punktet vilkårlig). En funksjon fra ett punkt til $\mathbb{R}$ er jo bare et tall i $\mathbb{R}$. Vektorrommet $\mathcal{C}(E)$ er altså bare vektorrommet $\mathbb{R}$. Tre vektorer (tall) i $\mathbb{R}$ er selvfølgelig lineært avhengige (vektorrommet er endimensjonalt).

8.13.

a) Hvis $\mathbf{0}_1$ og $\mathbf{0}_2$ er identitetselementer, så har vi:

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_1 &= \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 && \text{(V3), } \mathbf{0}_2 \text{ er identitetselement} \\ &= \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 && \text{(V2)} \\ &= \mathbf{0}_2 && \text{(V3), } \mathbf{0}_1 \text{ er identitetselement} \end{aligned}$$

b) Fra likheten $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ får du, ved å bruke aksiom (V2) på begge sider:

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$$

Vi vet fra aksiom (V4) at $\mathbf{u}$ har en additiv invers $-\mathbf{u}$. Legg til denne på hver side av likheten over; da får du:

$$(\mathbf{v} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u}) = (\mathbf{w} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u})$$

Bruk aksiom (V1) på begge sider:

$$\mathbf{v} + (\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) = \mathbf{w} + (\mathbf{u} + (-\mathbf{u}))$$

Bruk aksiom (V4):

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{w} + \mathbf{0}$$

Bruk aksiom (V3):

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

c) Bruk resultatet vist i del **b)**. Hvis to vektorer $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ begge er additive inverser til $\mathbf{u}$, så har vi

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{u} + \mathbf{w},$$

og da gir resultatet fra del **b)** at

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}.$$

8.14.

a) En naturlig basis for $\mathcal{P}_n$ er gitt av $1, x \ldots, x^n$. Dette er akkurat hva vi trenger for å få alle n-tegradspolynom. Basert på dette virker det rimelig at $\mathscr{B} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ er en basis for $\mathcal{P}$ (da burde vi akkurat ha det vi trenger for å få alle polynomer av vilkårlig grad).

b) Spenner ut: Et vilkårlig polynom kan skrives på formen $a_0x^{i_0} + a_1x^{i_1} + \cdots + a_kx^{i_k}$ hvor

$$i_0 < i_1 < \cdots < i_k$$

er naturlige tall. Men dette polynomet er automatisk en lineærkombinasjon av $x^{i_0}, x^{i_1}, \ldots, x^{i_k}$ som er en delmengde av $\mathscr{B}$.
Lineært uavhengig: Gitt en likning på formen

$$a_0x^{i_0} + a_1x^{i_1} + \cdots + a_kx^{i_k} = 0,$$

må vi vise at den kun har triviell løsning. Men dette er et i_k-tegradspolynom, og har derfor maksimalt i_k nullpunkt; polynomet kan umulig være null for alle tall x. Dette viser at vi kun har triviell løsning.
Dette viser at $\mathscr{B}$ spenner ut og er lineært uavhengig, som er definisjonen på en basis.

9.1.

a)

$$\begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 \\ -8 & -7 & 3 \\ -4 & 5 & -8 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Injektiv, ikke surjektiv.

b) Ikke lineær.

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Surjektiv, ikke injektiv.

9.2. Se på hva matrisen gjør med standardbasisen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Dette blir kolonnene i matrisen vi ønsker å finne.

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

9.3. Standardmatrisen til $S \circ R$ er:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Standardmatrisen til $R \circ S$ er:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Lineærtransformasjonen $S \circ R$ speiler planet om linjen $y = -2x$. Lineærtransformasjonen $R \circ S$ speiler planet om linjen $y = 2x$.

9.4.

a) Dette er standardbasisen 1, x og x^2.
Forklaring: Vi ønsker å skrive et vilkårlig andregradspolynom på formen $p(x) = p(0)f_1(x) + p'(0)f_2(x) + \frac{p''(0)}{2}f_3(x)$. Dette er akkurat hva $f_1 = 1$, $f_2 = x$ og $f_3 = x^2$ tilfredstiller: Gitt $p(x) = a + bx + cx^2$ ser vi at $p(0) = a$, $p'(0) = b$ og $\frac{p''(0)}{2} = c$ ved regning; dette er akkurat koeffisientene foran 1, x og x^2. Alternativ løsning: For en mer systematisk fremgangsmåte kan du følge metoden som er beskrevet i del **b)**.

b) Vi må finne tre polynom $e_(x)$, $e_2(x)$ og $e_3(x)$ som utgjør en basis slik at et vilkårlig polynom kan skrives på formen $p(x) = p(0)e_1(x) + p(1)e_2(x) + p(2)e_3(x)$ (da blir koordinatene $\begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$). Dette skjer akkurat dersom $e_1(x)$ tilfredstiller

$$e_1(0) = 1 \quad e_1(1) = 0 \quad e_1(2) = 0,$$

$e_2(x)$ tilfredstiller

$$e_2(0) = 0 \quad e_2(1) = 1 \quad e_2(2) = 0,$$

$e_3(x)$ tilfredstiller

$$e_3(0) = 0 \quad e_3(1) = 0 \quad e_3(2) = 1$$

(sett inn i likningen for $p(x)$ uttrykt ved e_i'ene for å se dette).

e_1: Polynomet kan skrives på formen $a_0 + a_1x + a_2x^2$, og vi krever – fra likningene for e_1 – ovenfor at

$$a_0 = 1 \quad a_0 + a_1 + a_2 = 0 \quad a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0.$$

Dette er tre likninger med tre ukjente, og vi bruker radreduksjon for å se at løsningen er $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{3}{2}$ og $a_2 = \frac{1}{2}$. Polynomet er derfor $e_1(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$. Alternativ løsning: $e_1(1) = 0$ og $e_1(2) = 0$ betyr at $(x-1)$ og $(x-2)$ er faktorer av e_1. Derfor må $e_1(x) = a(x-1)(x-2)$. Kravet $e_1(0) = 1$ gir nå $1 = a \cdot (-1) \cdot (-2)$ slik at $a = \frac{1}{2}$. Derfor er $e_1(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$. Du kan gange ut for å se at dette er det samme polynomet som vi fant ovenfor.

e_2: Samme fremgangsmåte som for e_1 – med litt forskjellige likninger – gir polynomet $e_2(x) = 2x - x^2$.

e_3: Samme fremgangsmåte som for e_1 – med litt forskjellige likninger – gir polynomet $e_3(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$.

Vi har nå tre polynom e_1, e_2 og e_3 som spenner $\mathcal{P}_2$ (det er konstruert slik at alle polynom kan skrives $p(x) = p(0)e_1(x) + p(1)e_2(x) + p(2)e_3(x)$). Det gjenstår kun å vise at de er lineært uavhengige. Men dette følger også fra hvordan e_i-ene er konstruert: Gitt en likning

$$x_1e_1(x) + x_2e_2(x) + x_3e_3(x) = 0$$

kan du sette inn for $x = 0, 1, 2$ for å se at $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ og $x_3 = 0$ på grunn av likningene som definerer e_i-ene.

c) Koordinatene til x^2:

$$[x]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \frac{p''(0)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$[x]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

d) Husk at en 3×3-matrise er bestemt av hvordan den endrer standardbasisen i $\mathbb{R}^3$.
T: I koordinatene til standardbasisen for $\mathcal{P}_2$ har vi at $[1]_{\mathscr{B}} = \mathbf{e}_1$, $[x]_{\mathscr{B}} = \mathbf{e}_2$ og $[x^2]_{\mathscr{B}} = \mathbf{e}_3$, hvor $\mathbf{e}_i$ er den i-te standardbasisen for $\mathbb{R}^3$, per definisjon av koordinater til en basis. Fra kommentaren ovenfor må vi ha at $T[1]_{\mathscr{B}} = [1]_{\mathscr{C}}$, $T[x]_{\mathscr{B}} = [x]_{\mathscr{C}}$, $T[x^2]_{\mathscr{B}} = [x^2]_{\mathscr{C}}$. Basisen $\mathscr{C}$ er konstruert slik at første koordinat er evaluering i 0, andre koordinat er evaluering i 1 og tredje koordinat er evaluering i 2. Derfor har vi

$$T = \begin{bmatrix} T\mathbf{e}_1 & T\mathbf{e}_2 & T\mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

S: Samme fremgang som for T. Husk at $e_1(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$, $e_2(x) = 2x - x^2$ og $e_3(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$. I koordinatene til $\mathscr{B}$ har vi da at $[e_1]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

$[e_2]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $[e_3]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Dette gir

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vi sjekker at matrisen gir riktig endring av koordinater for x^2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dette viser at S endrer koordinatene til x^2 som ønsket. Gjør tilsvarende regning for T.

9.5.

a)

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} T_\theta(\mathbf{e}_1) & T_\theta(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

b) Å bruke T_θ to ganger svarer til å rotere med en vinkel θ to ganger: $T_\theta \circ T_\theta = T_{2\theta}$. På matriseform har vi derfor

$$[T_\theta]^2 = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}.$$

Vi kan også regne ut dette produktet direkte:

$$[T_\theta]^2 = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix}.$$

Fra element $(1,1)$, eller $(2,2)$, ser vi at $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$.

9.6. Feil.
Lineærtransformasjonene $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ er på formen $T(x) = ax$ (vi kan tenke på konstanten a som en 1×1-matrise).

9.7.

a) Vi adderer og skalarmultipliserer lineærtransformasjoner på den åpenbare måten:

$$(T+S)(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}) + S(\mathbf{v})$$
$$(cT)(\mathbf{v}) = c \cdot (T(\mathbf{v}))$$

b) Definer en lineærtransformasjon

$$\varphi \colon \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathcal{M}_{m\times n}$$

ved at $\varphi(T)$ er standardmatrisen til T. Definer en lineærtransformasjon

$$\psi \colon \mathcal{M}_{m\times n} \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

ved at $\psi(A)$ er lineærtransformasjonen som har A som standardmatrise. Da er φ og ψ hverandres inverser, og vi får at $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathcal{M}_{m\times n}$.

9.8.

a) For å sjekke om en funksjon $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ er lineær, må vi sjekke to krav: i) $T(p_1(x)+p_2(x)) = T(p_1(x)) + T(p_2(x))$ for alle polynom $p_1(x)$ og $p_2(x)$, og ii) $T(c \cdot p(x)) = cT(p(x))$ for alle polynom $p(x)$ og skalarer c.
D: Se oppgaven som mer generelt tar for seg derivasjon av glatte funksjoner. Alternativ løsning: Et polynom er på formen $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Derivasjon av p er $D(p(x)) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$. Du kan eksplisitt sjekke at denne formelen er lineær (tilfredstiller i) og ii)).
G: i)

$$\begin{aligned} G(p_1(x) + p_2(x)) &= x \cdot (p_1(x) + p_2(x)) \\ &= x \cdot p_1(x) + x \cdot p_2(x) \\ &= G(p_1(x)) + G(p_2(x)). \end{aligned}$$

ii)

$$G(c \cdot p(x)) = x \cdot (c \cdot p(x)) = c \cdot (x \cdot (x)) = cG(p(x)).$$

Bildet til D er alle polynom som kan skrives som den deriverte til et annet polynom. Gitt et polynom

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

ser vi at

$$P(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

er en antiderivert til p; $P' = p$. Men dette betyr jo akkurat at $p = D(P)$. Så bildet til D er $\mathcal{P}$; alle polynom kan skrives som den deriverte til en antiderivert.
Kjernen til D er alle polynom som sendes til null, dvs. alle polynom som har derivert lik null. Dette er de konstante polynomene. Kjernen til D er alle konstante polynom.

b) Bildet til G er alle polynom $p(x)$ som kan skrives på formen $p(x) = G(q(x))$ for et polynom $q(x)$. Med andre ord $p(x) = xq(x)$. Bildet er derfor alle polynom som har x som en faktor, eller – ekvivalent – minst et nullpunkt i $x = 0$.
Kjernen til G er alle polynom som sendes er lik 0 hvis vi multipliserer det med x. Dette er kun sant for null-polynomet. Kjernen til G består kun av null-polynomet.

c) Husk at en lineærtransformasjon $T : V \to W$ er injektiv hvis og bare hvis kjernen kun består av null-vektoren; surjektiv hvis og bare hvis bildet er W (vi treffer alt).
Fra forrige deloppgave følger det at D er surjektiv, men ikke injektiv; G er injektiv, men ikke surjektiv.

d) Hvis vi bruker produktregelen for derivasjon (matte 1), ser vi at

$$(x \cdot p(x))' = x' \cdot p(x) + x \cdot p'(x) = p(x) + x \cdot p'(x).$$

Dermed får vi:

$$D(G(p(x))) = p(x) + G(D(p(x)))$$

Dette betyr at

$$(D \circ G)(p) - (G \circ D)(p) = p$$

for ethver polynom p, og det vil si at

$$(D \circ G) - (G \circ D) = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$$

e) La $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$ være polynomene gitt ved:

$$\mathbf{e}_0(x) = 1 \qquad \mathbf{e}_2(x) = x^2$$
$$\mathbf{e}_1(x) = x \qquad \mathbf{e}_3(x) = x^3$$

Da er $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ en basis for $\mathcal{P}_2$, og $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ en basis for $\mathcal{P}_3$.

Med hensyn på disse basisene får vi følgende matriser:

$$\text{Matrisen for } D_3\text{:} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matrisen for } G_3\text{:} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9.9.

a) T må være injektiv, og S må være surjektiv.

b) Vi får at $\dim U = \dim W$ siden $U \cong W$, og $\dim V \geq \dim U$ siden T er injektiv.

9.10.

a) Derivasjonsreglene fra matte 1:

$$(f+g)' = f' + g',$$
$$(cf)' = cf'.$$

Funksjonen vår er derivasjon; $D(f) = f'$. Likningene fra matte 1 kan omformuleres til

$$D(f+g) = D(f) + D(g),$$
$$D(cf) = cD(f).$$

Dette er definisjonen på at D er lineær.

b) Kjernen til D, $\ker D$, er definert som alle glatte funksjoner f slik at $f' = 0$. Kjernen er, med andre ord, alle løsningene på differensiallikningen $f' = 0$. Dette er de konstante funksjonene $f(x) = c$ hvor c er et reelt tall. Vi kan ta $f = 1$ som en basis for kjernen; en vilkårlig $g(x) = c$ i kjernen er da $g = cf$. Dette betyr at kjernen er endimensjonal og spesielt er den endeligdimensjonal.

c) En egenvektor til D med egenverdi λ, er en vektor/funksjon f slik at $D(f) = \lambda f$, eller $f' = \lambda f$. Dette er en differensiallikning med generell løsning $x_0 e^{\lambda x}$. Spesielt betyr dette at alle valg av λ gir egenverdier til D.

d) Ja.
Forklaring: D er surjektiv hvis det for alle glatte funksjoner f, finnes en glatt funksjon F slik at $f = D(F) (= F')$. Husk at fundamentalteoremet i analyse sier at $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (for alle valg av a, vi kan f. eks ta $a = 0$) er en antiderivert til f. Men dette betyr at $f = F' = D(F)$. Er F glatt? $F' = f$, så den er en gang deriverbar, og $F^{(n+1)} = f^{(n)}$ for $n > 1$, så den er glatt fordi f er glatt. Vi har derfor funnet en glatt F som tilfredstiller $D(F) = f$ for en vilkårlig vektor f.

10.1. Du skal skrive z på formen $a + ib$ og uttrykke real- og imaginærdelen til uttrykkene ved a og b.

10.2.

a) $-11 - 2i$

b) $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

c) $-\frac{33}{169} + \frac{56}{169}i$

10.3.

a) $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{19}i)$

b) $\sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{6}i}$, $\sqrt[3]{2}e^{\frac{5\pi}{6}i}$, $\sqrt[3]{2}e^{9\frac{\pi}{6}i}$

c) $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$, $\sqrt[4]{2}e^{\pi i}$, $\sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi}{2}i}$

d) $2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ gir: $2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{9\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{17\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{25\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{33\pi}{20}i}$

10.4. Hint: Skriv $z = a + ib$ og $w = c + id$. Regn ut høyre- og venstre side av ligningen.

10.5.

a)

$$(\cos x + i \sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{nx} = \cos nx + i \sin nx.$$

b)

$$(\overline{z})^n = (re^{-i\theta})^n = r^n e^{-in\theta} = \overline{r^n e^{in\theta}} = \overline{z^n}$$

10.6.

a) Euler gir: $e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})$. Bruk at cos er en like funksjon og sin er en odde funksjon for å se at $e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \cos(\frac{3\pi}{4}) - i\sin(\frac{3\pi}{4})$. Nå kan vi regne ut at

$$e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -2i\sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

b) $\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = e^{i(\frac{3\pi}{4} - (-\frac{3\pi}{4}))} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

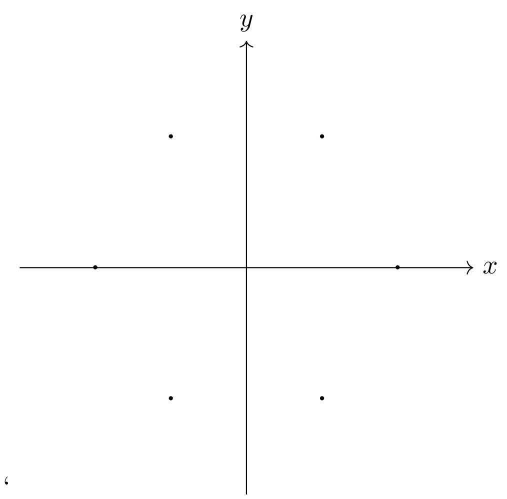
c) Polar Form: Veldig enkelt å multiplisere/dividere som del **b)** illustrerer; vanskelig å addere som del **a)** illustrerer.
Kartesisk: Her blir det motsatt: Enkelt å addere; vanskelig å dele.

10.7.

a) $2e^{\frac{2\pi i}{3}}$

b) $(-1 + i\sqrt{3})^6 = (2e^{\frac{2\pi i}{3}})^6 = 64e^{4\pi i} = 64$.

c) $2, 2e^{\frac{\pi i}{3}}, 2e^{\frac{2\pi i}{3}}, -2, 2e^{\frac{4\pi i}{3}}, 2e^{\frac{5\pi i}{3}}$



10.8.

a) Vi har at $(z-1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$ slik at $z = 1$ er en trippelrot.
Aletrnativt kan du gjette på løsningen $z = 1$ og deretter bruke polynomdivisjon.

b)

Fra **a)** har vi at likningen kan skrives på formen

$$(z-1)^3 = 1 = e^{2\pi i}.$$

Tredjerøttene til 1 er

$$e^{\frac{2\pi}{3}}, \quad e^{\frac{4\pi}{3}}, \quad 1.$$

Dermed har vi tre løsninger for $z - 1$ som igjen gir tre løsninger for z:

$$z = 1 + e^{\frac{2\pi}{3}}, 1 + e^{\frac{4\pi}{3}}, 2.$$

Tredjerøttene til 1 ligger uniformt fordelt på sirekelen sentrert i origo med radius 1, men er forskjøvet til å ligge uniformt fordelt på sirkelen sentrert i $(1, 0)$ med radius 1.

10.9.

a) Vi følger den vanlige metoden for å finne n-terøtter: Skriv 1 på polar form; $1 = e^{(2\pi k)i}$, k et heltall. Ta tredjeroten for å få $\sqrt[3]{1} = e^{(\frac{2\pi k}{3})i}$, k heltall. Dette gir ulike komplekse tall for $k = 0, 1, 2$:

$$1, \quad e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

Dette er tre punkter uniformt fordelt på sirkelen sentrert i origo med radius 1. Dersom vi trekker rette linjer mellom punkter etter økende vinkel får vi en trekant med røttene som hjørner.

b) Som i **a)** gir

$$1, \quad i, \quad -1, \quad -i.$$

Den geometriske figuren blir en firkant med hjørner i røttene.

c) Som i **a)** gir

$$1, \quad e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad e^{\frac{4\pi i}{n}}, \dots, e^{\frac{(n-1)\pi i}{n}}.$$

Den geometriske figuren blir en n-kant med hjørner i røttene.

d) Vi får fortsatt en n-kant med hjørner i røttene.
Forklaring: Et komplekst tall kan skrives på formen $re^{i\theta}$ hvor $r > 0$ er et reelt tall. Nå blir n-terøttene $\sqrt[n]{r}e^{(\theta + \frac{2\pi k}{n})i}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ (en hel runde i det komplekse planet). Dette er en uniform fordeling av n punkter på sirkelen sentrert i origo med radius $\sqrt[n]{r}$.

10.10. Vi har at

$$a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + ... + a_1 w + a_0 = 0.$$

Konjugering av hele ligningen gir

$$a_n (\overline{w})^n + a_{n-1} (\overline{w})^{n-1} + ... + a_1 (\overline{w}) + a_0 = 0,$$

men tidligere har du vist at $(\overline{w})^n = \overline{w^n}$, slik at

$$a_n \overline{w}^n + a_{n-1} \overline{w}^{n-1} + ... + a_1 \overline{w} + a_0 = 0.$$

10.11. Nei.
Løsning: Skriv tallene på polar form, $z = re^{i\theta}$ og $w = \rho e^{i\phi}$. Nå kan produktet uttrykkes $zw = r\rho e^{i(\theta+\phi)}$, hvor $r\rho > 0$. Derfor er produktet forskjellig fra null.
Alternativ løsning: Du kan også løse oppgaven ved å skrive z og w på formen $a + ib$.

10.12. Ja. Se oppgave 5b.

10.13. Operasjonene $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ og $r(a + ib) = (ra) + i(rb)$ er helt like som operasjonene på $\mathbb{R}^2$ dersom vi tenker på $a + ib$ som et punkt (a, b) i planet. Dermed er $\mathbb{C}$ helt likt $\mathbb{R}^2$ (bortsett fra at vektorene ser litt annerledes ut).

10.14. Definer følgende funksjoner

$$T(a + ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

og

$$S(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}) = a + ib.$$

Du kan sjekke at T og S er lineære. Du kan også sjekke at S og T er inverser av hverandre;

$$S(T(a + ib)) = a + ib,$$

og

$$T(S(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Derfor er både T og S isomorfier mellom vektorrommene.

11.1. Ligningssystemet

$$\begin{array}{lll} (1+i)z & -w & = i \\ (1-i)z & +(1+i)w & = 1 \end{array}$$

kan skrives som matriseligningen

$$\begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ligningen har entydig løsning

$$\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

11.2. Vi vet at kolonenne til en kvadratisk matrise er lineært avhengige hvis, og bare hvis, determinanten er 0.

a) Her er $\det(A) = 0$ så vi vet at kolonnene er lineært avhengige. Radreduserer vi matrisen får vi systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Her har vi én nullrad som betyr at nullrommet har dimensjon 1. Vi velger $z = t$ som fri kompleks variabel og får at $x = t$ og $y = -2t$ som betyr at nullrommet er

$$\text{null}(A) = \text{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Matrisen har determinant ulik 0. Derfor er kolonnene lineært uavhengige, og nullrommet inneholder kun vektoren $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

c) Her er determinanten lik 0 så kolonnene er lineært avhengige. Vi finner radredusert form

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

for så å finne nullrommet. Dette er den samme matrisen som den vi fikk i a) og nullrommet blir derfor likt.

11.3.

a) Determinanten er -2 og egenverdiene er -2, i og $-i$. Egenrommene er utspent av de korresponderende egenvektorene

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}i\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-i\\1\\1\end{bmatrix}$$

b) Her er determinanten 2 og vi har karakteristisk polynom

$$(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

som gir egenverdier $\lambda = -1$ og $\lambda = 2$.

c) Determinanten er 20 og karakteristisk polynom er

$$(\lambda-2)^2(\lambda-5)$$

d) Determinanten er 27 og egenverdiene er $\lambda = 3$ med multiplisitet 3

11.4. Hvis vi ganger sammen egenverdiene *med* multiplisitet får vi

$$\begin{aligned}(-2)i(-i) &= -2\\(-1)^2 2 &= 2\\2^2\cdot 5 &= 20\\3^3 &= 27\end{aligned}$$

altså nøyaktig determinantene til de respektive matrisene.

11.5. Ved samme fremgangsmåte som kapittel 3, oppgave 5, kan vi f. eks se at

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

er lineært uavhengig av vektorene i oppgaveteksten. Videre kan du sjekke at de to gitte vektorene også er lineært uavhengige. Vi har altså tre lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{C}^3$, som derfor spenner ut $\mathbb{C}^3$.

11.6. Vi ønsker å velge a slik at vi har en lineærkombinasjon

$$\begin{bmatrix}a\\6-6i\\-12\end{bmatrix} = b\begin{bmatrix}-3\\2i\\8\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},$$

ekvivalent har matriseligningen

$$\begin{bmatrix}a\\6-6i\\-12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 1\\2i & 1\\8 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\c\end{bmatrix}$$

en løsning. Dette gir at $b = -3$ og $c = 6$ slik at

$$a = 3b + c = 15$$

11.7. Vi antar at A har egenverdi λ. Dette betyr at det finnes en $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ slik at

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Multipliser begge sidene av ligningen med A for å få

$$A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}).$$

Vi kan flytte på paranteser, dra ut konstanter og bruke at $\mathbf{v}$ er en egenverdi til A for å se at

$$A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(A\mathbf{v}) = \lambda(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}.$$

Dette betyr at λ^2 er en egenverdi til matrisen A^2.

11.8. Vi setter som vanlig opp matrisen

$$T_\theta - \lambda I = \begin{bmatrix}\cos\theta-\lambda & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda\end{bmatrix}$$

og beregner determinanten

$$\det(T_\theta - \lambda I) = \lambda^2 - 2\cos\theta + 1$$

Ved nå å bruke abc-formelen får vi at

$$\lambda = \frac{2\cos\theta \pm 2\sqrt{\cos^2\theta - 1}}{2}$$

som blir

$$\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

Hvis vi ser på denne komplekse egenverdien som en vektor i planet er det nøyaktig vektoren som peker i samme retning som $\mathbf{e}_1$ rotert med/mot klokken med θ radianer. Fra tidligere øvinger vet vi at $T_{2\theta} = T_\theta \cdot T_\theta = T_\theta^2$. Fra oppgave 7 vet vi derfor at egenverdiene til $T_{2\theta}$ er λ^2

$$\lambda^2 = (\cos\theta \pm i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta \pm \sin 2\theta.$$

11.9. Her må vi finne den beste raden/kolonnen for å regne ut determinanten.

a) Regner vi ut determinanten langs den første raden får vi determinanten

$$i(i^2 - 1^2) - 0 + 0 = -2i$$

b) Matrise er blokkdiagonal, slik at

$$\det\begin{bmatrix}i & 1 & 0 & 0\\1 & i & 0 & 0\\0 & 0 & i & 1\\0 & 0 & 1 & i\end{bmatrix} =$$

$$\det\begin{bmatrix}i & 1\\1 & i\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix}i & 1\\1 & i\end{bmatrix} = (-1)\cdot(-1) = 4.$$

c) Denne matrisen er blokktriangulær, så determinanten blir

$$\det \begin{bmatrix} i & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix} =$$
$$\det \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} = (-1) \cdot (-1) = 4.$$

d) Bruk blokktriangulariteten og få $(-2)^3 = -8$. (Google block triangular matrix.)

e) Lureoppgave: denne matrisen er singulær.

11.10. Vi fant egenverdiene og egenvektorene i oppgave 3. Hvis vi setter disse opp i matrisen P får vi

$$P = \begin{bmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

som gir oss

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

som er en diagonalmatrise hvor elementene er egenverdiene til A.

11.11. Vi regner ut det karakteristiske polynomet som vanlig og får

$$\lambda^2 - 8\lambda = \lambda(\lambda - 8)$$

som betyr at egenverdiene er 0 og 8. Her kan vi observere at determinanten til matrisen er 0 siden den første raden er halvparten av den andre.

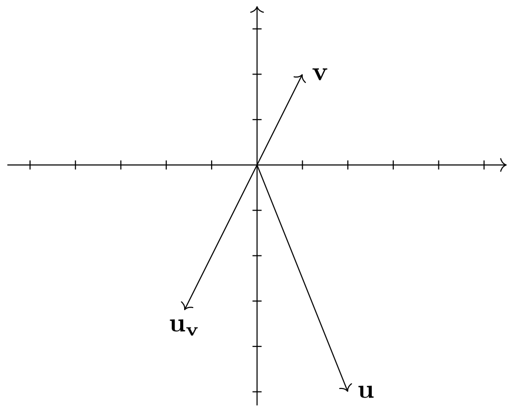
11.12. Anta at null er en egenverdi til en matrise A.
Ønsker: A er singulær. Vi har sett mange ekvivalente formuleringer av singulær. En av dem er at det finnes en ikke-null løsning av ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Antagelsen: Det finnes en ikke-null vektor $\mathbf{v}$ slik at $A\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Observasjon: Vi ser at egenvektoren $\mathbf{v}$ er en ikke-null løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Konklusjon: A er singulær, som er det vi ønsket å vise.

12.1.

$$\begin{bmatrix} 1-i & 2 & 2+i \\ 1+i & i & 1-i \end{bmatrix}$$

12.2. Projeksjonen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ er:

$$\mathbf{u_v} = \frac{\mathbf{v}^*\mathbf{u}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-5)}{1^2 + 2^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8/5 \\ -16/5 \end{bmatrix}$$



12.3. For å finne ut om en matrise P representerer en projeksjon, må vi sjekke om $P^2 = P$.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Konklusjon: Matrisene i del **a)**, **b)**, **c)** og **f)** representerer projeksjoner; matrisene i del **d)** og **e)** representerer ikke projeksjoner.

12.4.

a) Indreproduktet av de to vektorene er:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 + 1 \cdot 0 = -8$$

Siden indreproduktet ikke er 0, er vektorene ikke ortogonale.

b) Vi ser på indreproduktet av hvert par av vektorer:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$
$$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Alle de tre vektorene er ortogonale til hverandre.

c) Vi ser på indreproduktet av hvert par av vektorer:

$$\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} = 0$$

Vektorene $(i, 0, 1)$ og $(i, 1, 0)$ er altså ikke ortogonale, men vektoren $(1, i, i)$ er ortogonal til hver av de to andre.

12.5.

a) Vi får:

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{u}} &= \frac{1}{\mathbf{u}^*\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^*) \\ &= \frac{1}{2^2 + (-5)^2 + 1^2} \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-5) & 2 \cdot 1 \\ -5 \cdot 2 & -5 \cdot (-5) & -5 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-5) & 1 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2/15 & -1/3 & 1/15 \\ -1/3 & 5/6 & -1/6 \\ 1/15 & -1/6 & 1/30 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$P_{\mathbf{u}^\perp} = I_3 - P_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 13/15 & 1/3 & -1/15 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ -1/15 & 1/6 & 29/30 \end{bmatrix}$$

$$P_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 13/15 & 1/3 & -1/15 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ -1/15 & 1/6 & 29/30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8/15 \\ 4/3 \\ -4/15 \end{bmatrix}$$

$$P_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 13/15 & 4/3 & 14/15 \\ 4/3 & 1/6 & 7/6 \\ 14/15 & 7/6 & 29/30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23/15 \\ 2/3 \\ 4/15 \end{bmatrix}$$

I de neste delene viser vi ikke all mellomregningen, men bare resultatene.

b)

$$P_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad P_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$P_{\mathbf{u}^\perp} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad P_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

c) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$P_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad P_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} i/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$P_{\mathbf{u}^\perp} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ i/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad P_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} i/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

12.6. Vi kan sjekke at vektorene

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige på vanlig måte (kombiner dem til en matrise, gausseliminer og sjekk at det blir pivotelementer i alle kolonner). Det betyr at de utgjør en basis for $\mathbb{R}^3$. Videre sjekker vi at de er en ortogonal basis ved å sjekke at hver av dem er ortogonal til begge de andre.

Når vi vet at vi har en ortogonal basis, kan vi finne koordinatene til en vektor med hensyn på basisen ved å projisere vektoren ortogonalt på hver basisvektor:

$$P_{\mathbf{b}_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\mathbf{b}_1$$

$$P_{\mathbf{b}_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\mathbf{b}_2$$

$$P_{\mathbf{b}_3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0\mathbf{b}_3$$

Koeffisientene til vektoren $(1, 1, 1)$ med hensyn på basisen $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ er altså $(1/3, 2/3, 0)$.

12.7.

a) Vi bruker Gram–Schmidt-ortogonalisering, og får:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - P_{\mathbf{u}_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23/15 \\ 2/3 \\ 4/15 \end{bmatrix}$$

Da er $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ en ortogonal basis. Vi finner en ortonormal basis ved å dele hver basisvektor på lengden sin:

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{30} \\ -5/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{30} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_2\|}\mathbf{u}_2 = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{43}}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 23\sqrt{15}/15\sqrt{43} \\ 2\sqrt{15}/3\sqrt{43} \\ 4\sqrt{15}/15\sqrt{43} \end{bmatrix}$$

Da er $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2)$ en ortonormal basis.

b) Vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

er allerede ortogonale, så det eneste som gjenstår er å normalisere dem. Vi deler hver vektor på lengden sin og får:

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Da er $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{u}}_3)$ en ortonormal basis.

c) Vi husker at vi så de samme vektorene i oppgave 12.4. Da fant vi ut at vektoren $(1, i, i)$ er ortogonal til hver av de to andre. Det betyr at vi kan starte med å sette:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da er $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ ortogonale til hverandre, og vi må bare gjøre $(i, 0, 1)$ ortogonal til begge disse. Vi setter:

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - P_{\mathbf{u}_1} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - P_{\mathbf{u}_2} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Da er $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ en ortogonal basis. Vi normaliserer:

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_3 = \begin{bmatrix} i/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Da er $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{u}}_3)$ en ortonormal basis.

12.8. Vi bruker den ortogonale basisen $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ som vi fant i oppgave 12.7 a), og projiserer vektoren $(i, 2+i, 1)$ ned på hver basisvektor. Da får vi følgende vektor:

$$\begin{aligned} &P_{\mathbf{u}_1} \begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix} + P_{\mathbf{u}_2} \begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3/5 - i/5 \\ 3/2 + i/2 \\ -3/10 - i/10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 184/215 + 253i/215 \\ 16/43 + 22i/43 \\ 32/215 + 44i/215 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11/43 + 42i/43 \\ 161/86 + 87i/86 \\ -13/86 + 9/86 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

12.9.

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

være koeffisientmatrisen og høyresiden i likningssystemet vårt. Vi ganger hver av disse med den adjungerte av A på venstre side, og får:

$$A^*A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^*\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Vi må løse likningssystemet

$$A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}.$$

Dette systemet har følgende totalmatrise:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

Når vi gausseliminerer denne, får vi:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5/38 \\ 0 & 1 & -11/19 \end{array}\right]$$

Minste kvadraters metode gir altså løsningen

$$\begin{bmatrix} 5/38 \\ -11/19 \end{bmatrix}.$$

b) La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ i & i & -1 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$

være koeffisientmatrisen og høyresiden. Vi får:

$$\begin{aligned} A^*A &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & -i & -i & -i \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ i & i & -1 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 4 & -i \\ -i & i & 3 \end{bmatrix} \\ A^*\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & -i & -i & -i \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-i \\ 1-3i \\ 1-2i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Det betyr at systemet

$$A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$$

har følgende totalmatrise:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 1-i \\ 1 & 4 & -i & 1-3i \\ -i & i & 3 & 1-2i \end{array}\right]$$

Vi gausseliminerer og får:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/2 - i/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 - 2i/3 \\ 0 & 0 & 1 & -3i/2 \end{array}\right]$$

Minste kvadraters metode gir altså løsningen

$$\begin{bmatrix} -3/2 - i/3 \\ 1 - 2i/3 \\ -3i/2 \end{bmatrix}.$$

12.10.

a) Vi vil finne et fjerdegradspolynom

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

som oppfyller:

$$\begin{aligned} p(0) &= 1 & p(3) &= 5 \\ p(1) &= 2 & p(4) &= 7 \\ p(2) &= 3 \end{aligned}$$

Det betyr at koeffisientene $a_4, a_3, \ldots, a_0$ må oppfylle følgende likninger:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 2 \\ 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 3 \\ 81a_4 + 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 5 \\ 256a_4 + 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 = 7 \end{cases}$$

b) Hvis det fantes et annengradspolynom

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

som gikk gjennom alle punktene, ville koeffisientene oppfylt følgende likningssystem:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_2 + a_1 + a_0 = 2 \\ 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 3 \\ 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 5 \\ 16a_2 + 4a_1 + a_0 = 7 \end{cases}$$

Vi bruker minste kvadraters metode på dette systemet. La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

være koeffisientmatrisen og høyresiden. Vi får:

$$A^*A = \begin{bmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$
$$A^*\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 171 \\ 51 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Løsningen av likningssystemet $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$ blir:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3/14 \\ 9/14 \\ 36/35 \end{bmatrix}$$

Annengradspolynomet som passer best til punktene er altså:

$$p(x) = \frac{3}{14}x^2 + \frac{9}{14}x + \frac{36}{35}$$

12.11.

a) Vi bruker minste kvadraters metode på likningssystemet

$$\begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 9 \\ 27a + 9b + 3c + d = 28 \\ 64a + 16b + 4c + d = 65 \end{cases}$$

og får løsningen

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Polynomet som passer best til punktene er altså:

$$p(x) = x^3 + 1$$

b) Polynomet p som vi fant i del a) passer faktisk eksakt til punktene.

12.12. Siden $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ er en ortonormal basis, har vi

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^\top \mathbf{u}_k &= 1 \quad \text{for hver } k\text{, og} \\ \mathbf{u}_k^\top \mathbf{u}_l &= 0 \quad \text{for } k \neq l. \end{aligned}$$

Det vil si at

$$\begin{aligned} A^\top A &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^\top \\ \mathbf{u}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^\top\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1^\top\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1^\top\mathbf{u}_3 & \cdots & \mathbf{u}_1^\top\mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_2^\top\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2^\top\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2^\top\mathbf{u}_3 & \cdots & \mathbf{u}_2^\top\mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_3^\top\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_3^\top\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3^\top\mathbf{u}_3 & \cdots & \mathbf{u}_3^\top\mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_n^\top\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_n^\top\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_n^\top\mathbf{u}_3 & \cdots & \mathbf{u}_n^\top\mathbf{u}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ &= I_n \end{aligned}$$

Dette vil si at $A^\top$ er inversen til A.

(Hvorfor holdt det å regne ut $A^\top A$? Må vi ikke også sjekke at $AA^\top$ blir I_n? Husk at vi i slutten av kapittel 4 viste at dersom $AB = I_n$ for to $n \times n$-matriser A og B, så er også $BA = I_n$. Så når vi har sjekket at $A^\top A = I_n$, så følger det at $AA^\top$ også må være I_n.)

12.13. La $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$ være en samling med vektorer som er parvis ortogonale. Da har vi

$$\mathbf{v}_k^*\mathbf{v}_l = 0$$

for alle k og l slik at $k \neq l$.

Vi vil vise at vektorene er lineært uavhengige, så vi ser på likningen

$$\mathbf{v}_1x_1 + \mathbf{v}_2x_2 + \cdots + \mathbf{v}_nx_n = 0.$$

Hvis vi ganger denne til venstre med $\mathbf{v}_1^*$, får vi:

$$\mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_n x_n = 0,$$

som vi kan forenkle til

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 x_1 = 0.$$

Siden $\mathbf{v}_1$ ikke er nullvektoren, er lengden $\|\mathbf{v}_1\|$ ulik 0, så dette betyr at

$$x_1 = 0.$$

På samme måte kan vi gange likningen med $\mathbf{v}_2^*$, og $\mathbf{v}_3^*$, og så videre, og da får vi

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0.$$

Det vil si at eneste løsning av likningen

$$\mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{v}_n x_n = 0.$$

er den trivielle løsningen, og dermed er vektorene

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_n$$

lineært uavhengige.

12.14. La $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være to vilkårlige vektorer i $\mathbb{C}^n$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Da har vi:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^*\mathbf{w} &= \begin{bmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \\ &= \overline{v_1}w_1 + \overline{v_2}w_2 + \cdots \overline{v_n}w_n \end{aligned}$$

På samme måte får vi:

$$\mathbf{w}^*\mathbf{v} = \overline{w_1}v_1 + \overline{w_2}v_2 + \cdots \overline{w_n}v_n,$$

Dermed:

$$\overline{\mathbf{w}^*\mathbf{v}} = w_1\overline{v_1} + w_2\overline{v_2} + \cdots w_n\overline{v_n} = \mathbf{v}^*\mathbf{w}$$

12.15. Vi tar først noen merknader om matrisen $P_{\mathbf{v}}$.

Vi har

$$P_{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} = \frac{1}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^*$$

Siden $\mathbf{v}^*\mathbf{v}$ er et reelt tall, har vi:

$$P_{\mathbf{v}}^* = \frac{1}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}(\mathbf{v}\mathbf{v}^*)^* = \frac{1}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}(\mathbf{v}^*)^*\mathbf{v}^* = \frac{1}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^* = P_{\mathbf{v}}$$

Matrisen $P_{\mathbf{v}}$ er altså sin egen adjungerte. Videre har vi:

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{v}}^2 &= \left(\frac{1}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}\right)^2 (\mathbf{v}\mathbf{v}^*)(\mathbf{v}\mathbf{v}^*) \\ &= \frac{1}{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})^2}\mathbf{v}(\mathbf{v}^*\mathbf{v})\mathbf{v}^* \\ &= \frac{1}{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})^2}(\mathbf{v}^*\mathbf{v})\mathbf{v}\mathbf{v}^* \\ &= \frac{1}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^* \\ &= P_{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

Det å opphøye matrisen $P_{\mathbf{v}}$ i andre gir altså oss igjen bare den samme matrisen tilbake.

Nå går vi løs på å vise at vektorene $P_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$ og $\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$ er ortogonale. Ved å bruke at $P_{\mathbf{v}}^* = P_{\mathbf{v}}$ og at $P_{\mathbf{v}}^2 = P_{\mathbf{v}}$ får vi:

$$\begin{aligned} (P_{\mathbf{v}}\mathbf{w})^*(\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}\mathbf{w}) &= \mathbf{w}^*P_{\mathbf{v}}^*(\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}\mathbf{w}) \\ &= \mathbf{w}^*P_{\mathbf{v}}^*\mathbf{w} - \mathbf{w}^*P_{\mathbf{v}}^*P_{\mathbf{v}}\mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^*P_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - \mathbf{w}^*P_{\mathbf{v}}P_{\mathbf{v}}\mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^*P_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - \mathbf{w}^*P_{\mathbf{v}}\mathbf{w} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Det vil si at $P_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$ og $\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$ er ortogonale.

13.1.

a) Matrisen har egenverdien 0, med tilhørende egenrom $\mathrm{Sp}\{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]\}$. Siden den ikke har to lineært uavhengige egenvektorer er den ikke diagonaliserbar.

b) Matrisen har egenverdiene 2 og 5, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\} \qquad \text{og} \qquad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}25\\15\\9\end{bmatrix}\right\}.$$

Siden den ikke har tre lineært uavhengige egenvektorer er den ikke diagonaliserbar.

c) Det karakteristiske polynomet er

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ 3 & -1-\lambda & 6 \\ -2 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda - 16.$$

Vi må altså løse likningen

$$-\lambda^3 + 12\lambda - 16 = 0.$$

Ved å prøve oss frem finner vi ganske raskt at $\lambda = 2$ er en løsning. Det vil si at vi kan dele ut faktoren $(\lambda - 2)$ fra det karakteristiske polynomet ved polynomdivisjon. Da får vi at

$$-\lambda^3 + 12\lambda - 16 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 - 2\lambda + 8).$$

Vi finner dermed de andre løsningene av likningen ved å løse

$$-\lambda^2 - 2\lambda + 8 = 0,$$

som vi gjør ved å bruke den vanlige formelen for andregradslikninger:

$$\lambda = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 8}}{2(-1)} = -1 \pm 3$$

Egenverdiene til matrisen er altså 2 og -4.

Vi finner egenrommene på vanlig måte. Egenrommet til egenverdien 2 er

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\right\},$$

og egenrommet til egenverdien -4 er

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}\right\}.$$

Matrisen har altså tre lineært uavhengige egenvektorer, så den er diagonaliserbar.

d) Egenverdiene er 3, $-i$ og i, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\},\qquad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}-i\\1\\0\end{bmatrix}\right\},\qquad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}i\\1\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Matrisen har altså tre lineært uavhengige egenvektorer, så den er diagonaliserbar.

e) Egenverdiene er 0, 3, $-i$ og i, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}-6\\5\\0\\1\end{bmatrix}\right\},\quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}39\\113\\30\\40\end{bmatrix}\right\},\quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}-i\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\},\quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}i\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

Matrisen har altså fire lineært uavhengige egenvektorer, så den er diagonaliserbar.

f) Egenverdiene er -4, 7, $-i$ og i, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}20\\12\\17\\-17\end{bmatrix}\right\},\quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}151\\293\\350\\200\end{bmatrix}\right\},\quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}-i\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\},\quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}i\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Matrisen har altså fire lineært uavhengige egenvektorer, så den er diagonaliserbar.

13.2. Vi starter med å finne en diagonalisering $A = VDV^{-1}$ av A. Siden A er øvre triangulær, er egenverdiene til A bare tallene på diagonalen: 2, 3 og 5. Vi lager matrisen V ved å sette sammen egenvektorer som hører til de tre egenverdiene, og vi lager matrisen D ved å sette egenverdiene på diagonalen:

$$V = \begin{bmatrix}1 & 3 & 25\\0 & 1 & 15\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

Da får vi (ved å regne ut inversen på vanlig måte) at

$$V^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -3 & 10/3\\0 & 1 & -5/2\\0 & 0 & 1/6\end{bmatrix}$$

Dermed har vi diagonalisert matrisen A.

Legg merke til at når $A = VDV^{-1}$, så har vi

$$\begin{aligned}A^2 &= (VDV^{-1})(VDV^{-1}) = VD(V^{-1}V)DV^{-1}\\ &= VD^2V^{-1},\\ A^3 &= (VD^2V^{-1})(VDV^{-1}) = VD^2(V^{-1}V)DV^{-1}\\ &= VD^3V^{-1},\end{aligned}$$

og så videre. Generelt:

$$A^n = VD^nV^{-1}$$

Det betyr at i vårt tilfelle kan vi beregne A^{10} slik:

$$\begin{aligned}A^{10} &= VD^{10}V^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 3 & 25\\0 & 1 & 15\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^{10} & 0 & 0\\0 & 3^{10} & 0\\0 & 0 & 5^{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3 & 10/3\\0 & 1 & -5/2\\0 & 0 & 1/6\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1024 & 174075 & 40250650\\0 & 59049 & 24266440\\0 & 0 & 9765625\end{bmatrix}\end{aligned}$$

13.3.

a) Det karakteristiske polynomet er

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 3-i\\3+i & 4-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - (3-i)(3+i) = \lambda^2 - 6\lambda - 2,$$

og egenverdiene er $3+\sqrt{11}$ og $3-\sqrt{11}$.

Vi finner lett ut at

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}3-i\\1+\sqrt{11}\end{bmatrix}$$

er en egenvektor for egenverdien $3+\sqrt{11}$, og at

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}3-i\\1-\sqrt{11}\end{bmatrix}$$

er en egenvektor for egenverdien $3-\sqrt{11}$. For å lage en ortogonal diagonalisering må vi ha egenvektorer med lengde 1, så vi deler hver av disse på lengden sin og får normaliserte egenvektorer $\hat{\mathbf{v}}_1$ og $\hat{\mathbf{v}}_2$:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}}_1 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2(11+\sqrt{11})}}\mathbf{v}_1\\ &= \begin{bmatrix}(3-i)\big/\sqrt{2(11+\sqrt{11})}\\(1+\sqrt{11})\big/\sqrt{2(11+\sqrt{11})}\end{bmatrix}\\ \hat{\mathbf{v}}_2 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2(11-\sqrt{11})}}\mathbf{v}_2\\ &= \begin{bmatrix}(3-i)\big/\sqrt{2(11-\sqrt{11})}\\(1-\sqrt{11})\big/\sqrt{2(11-\sqrt{11})}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Da kan vi sette

$$V = \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{v}}_1 & \hat{\mathbf{v}}_2\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix}3+\sqrt{11} & 0\\0 & 3-\sqrt{11}\end{bmatrix}$$

b) Det karakteristiske polynomet er

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1-i\\1+i & -1-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 3.$$

Egenverdiene er $\sqrt{3}$ og $-\sqrt{3}$. Vi finner tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}-1+i\\1-\sqrt{3}\end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}-1+i\\1+\sqrt{3}\end{bmatrix}.$$

Vi normaliserer disse:

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} (-1+i)/\sqrt{(6-2\sqrt{3})} \\ (1-\sqrt{3})/\sqrt{(6-2\sqrt{3})} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} (-1+i)/\sqrt{(6+2\sqrt{3})} \\ (1+\sqrt{3})/\sqrt{(6+2\sqrt{3})} \end{bmatrix}$$

Da kan vi sette

$$V = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1 & \hat{\mathbf{v}}_2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

c) Det karakteristiske polynomet er

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 36\lambda$$

Egenverdiene er 0, 4 og 9. Vi finner tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi normaliserer disse:

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{3} \\ 1/(2\sqrt{3}) \\ 1/(2\sqrt{3}) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{v}}_3 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

Da kan vi sette

$$V = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1 & \hat{\mathbf{v}}_2 & \hat{\mathbf{v}}_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

13.4. Det karakteristiske polynomet til A er:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} r_1 - \lambda & z \\ \overline{z} & r_2 - \lambda \end{vmatrix} &= (r_1 - \lambda)(r_2 - \lambda) - z\overline{z} \\ &= \lambda^2 - (r_1 + r_2)\lambda + r_1 r_2 - z\overline{z} \end{aligned}$$

Egenverdiene blir:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{r_1 + r_2 \pm \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4(r_1 r_2 - z\overline{z})}}{2} \\ &= \frac{r_1 + r_2 \pm \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4z\overline{z}}}{2} \end{aligned}$$

13.5. Det karakteristiske polynomet er

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ b & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-b-\lambda \end{vmatrix} = (a-b-\lambda)\big((a-\lambda)^2 - b^2\big).$$

For å finne egenverdiene må vi altså løse likningen

$$(a-b-\lambda)\big((a-\lambda)^2 - b^2\big) = 0,$$

som er det samme som

$$a - b - \lambda = 0 \qquad \text{eller} \qquad (a-\lambda)^2 - b^2 = 0.$$

Vi får løsningene $\lambda = a \pm b$, så matrisen A har de to egenverdiene $a-b$ og $a+b$.

Vi gausseliminerer matrisen $A - (a-b)I_3$ for å finne egenvektorer som hører til den første egenverdien:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} a-(a-b) & b & 0 \\ b & a-(a-b) & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)-(a-b) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b & b & 0 \\ b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Egenrommet til egenverdien $a-b$ er altså

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vi gausseliminerer matrisen $A - (a+b)I_3$ for å finne egenvektorer som hører til den andre egenverdien:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} a-(a+b) & b & 0 \\ b & a-(a+b) & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)-(a+b) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -b & b & 0 \\ b & -b & 0 \\ 0 & 0 & -2b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Egenrommet til egenverdien $a+b$ er altså

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Matrisen A er diagonaliserbar siden den har tre lineært uavhengige egenvektorer.

13.6. Anta at A er en symmetrisk matrise, altså at $A = A^*$. Da har vi

$$A^*A = AA = AA^*,$$

så A er normal.

13.7. La $A = \begin{bmatrix} 5 & -1-2i \\ -1-2i & 5 \end{bmatrix}$.

a) Den adjungerte av A er:

$$A^* = \begin{bmatrix} 5 & -1+2i \\ -1+2i & 5 \end{bmatrix}$$

Siden $A^* \neq A$ er A ikke symmetrisk.

b) Vi kan sjekke direkte om A er ortogonalt diagonaliserbar, men det kan være enklere å svare på del **c)** først.

c) Vi regner ut A^*A og AA^*:

$$\begin{aligned} A^*A &= \begin{bmatrix} 5 & -1+2i \\ -1+2i & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1-2i \\ -1-2i & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 30 \end{bmatrix} \\ AA^* &= \begin{bmatrix} 5 & -1-2i \\ -1-2i & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1+2i \\ -1+2i & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 30 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi har altså at $A^*A = AA^*$, så A er en normal matrise.

b) Vi har funnet ut at A er normal, og dermed må den være ortogonalt diagonaliserbar.

13.8.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Ikke diagonaliserbar: Vi ser at $\lambda = 0$ er eneste egenverdien (triangulær matrise). Men det er kun konstante polynom som er egenvektorer til 0 (den deriverte av en konstant er lik null). Med andre ord, egenrommet til null er endimensjonalt.

13.9.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) Egenverdiene er 1, 2 og 3, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, \qquad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, \qquad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Matrisen A er diagonaliserbar siden den har tre lineært uavhengige egenvektorer.

13.10.

a) Rotasjonsvinkelen er $\pi/6$.

b) Det karakteristiske polynomet er:

$$\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda\right)^2 + \frac{1}{4}$$

Egenverdiene er

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \qquad \text{og} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},$$

med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \qquad \text{og} \qquad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

c) La

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}$$

være de to egenvektorene i fant i del **b)**. Vi skal finne matrisen til T med hensyn på basisen $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Vi vet at

$$T(\mathbf{v}_1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\mathbf{v}_1 \quad \text{og} \quad T(\mathbf{v}_2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\mathbf{v}_2.$$

Dermed får vi følgende matrise:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \end{bmatrix}$$

14.1. Vi ber kun om en skisse. Det holder å finne egenverdiene for å se hvordan systemet oppfører seg.

a) Egenverdiene er -1 og 1, derfor får vi en sadel om origo.

b) Egenverdiene er 4 og 6, derfor får vi en ustabilt likevektsløsning.

c) Egenverdiene er $2+i$ og $2-i$, derfor får vi spiraler som er sirkulære og utgående fra origo.

d) Egenverdiene er $3i$ og $-3i$, derfor får vi sirkulære baner om origo.

14.2. Du fant egenverdier og egenvektorer til alle matrisene i kapittel 13. Du trenger derfor bare å sette inn i formelen for generell løsning.

a)

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix} 25 \\ 15 \\ 6 \end{bmatrix} e^{5t}$$

b)

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-4t}$$

c)

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} &+ c_2 \left(\cos(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &+ c_3 \left(\cos(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 20 \\ 12 \\ 17 \\ -17 \end{bmatrix} e^{-4t} &+ c_2 \begin{bmatrix} 151 \\ 293 \\ 350 \\ 200 \end{bmatrix} e^{7t} \\ &+ c_3 \left(\cos(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &+ c_4 \left(\cos(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

14.3.

a)

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$$

b)

$$\mathbf{y} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-4t}$$

c)

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} &+ 2(\cos(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \\ &+ (\cos(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) \end{aligned}$$

14.4.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} e^{3(t-\frac{\pi}{2})} - \left(\cos(t)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - \sin(t)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) + \left(\cos(t)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \sin(t)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

14.5. Vi har sett at den generelle løsningen er

$$\mathbf{y} = c_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}e^{2t} + c_2\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}e^{2t} + c_3\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}e^{-4t}.$$

Det gjenstår kun å bestemme koeffisientene fra initialverdiene:

$$c_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix} = \mathbf{y}_0.$$

Dette kan skrives som en matriselikning

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\1 & 0 & 3\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}\mathbf{c} = \mathbf{y}_0$$

hvor $\mathbf{c} = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$. Du kan sjekke at kolonnene til denne matrisen er inverterbar. Dermed er det et entydig valg av koeffisienter c_1, c_2 og c_3; løsningen er dermed entydig ettersom den generelle løsningen inneholder alle løsninger.

14.6.

a) Dette er superposisjonsprinsippet.

b) Vi viste i forrige oppgave at en løsning er entydig bestemt av en gitt initialverdi. Initialverdiene danner et tredimensjonalt rom. Derfor er dimensjonen lik tre.

15.1. La $v = y'$.

a) $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y\\v\end{bmatrix}'$

b) $\begin{bmatrix}0 & 1\\-3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y\\v\end{bmatrix}'$

c) $\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y\\v\end{bmatrix}'$

15.2.

a) $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$

b) $y = c_1\cos(t) + c_2\sin(t)$

c) $y = (c_1 + tc_2)e^{2t}$

15.3.

a) $y = \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})$

b) $y = \sin(t)$

c) $y = (t-1)e^{2(t-1)}$

15.4.

a) Prøv $y = ae^{-2t}$ for å finne

$$y = c_1e^{2t} + c_2e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

b) Prøv $y = ate^{2t}$ for å finne

$$y = c_1e^{2t} + c_2e^{-t} + \frac{1}{3}te^{2t}.$$

c) Prøv at for å finne

$$y = c_1\cos(t) + c_2\sin(t) + t.$$

d) Prøv $at + b$ for å finne

$$y = (c_1 + tc_2)e^{2t} + t + 1.$$

15.5. Vi ser at polynomene blir like.

Bevis: Betrakt en generell likning $y'' + py' + qy = 0$. Det karakteristiske polynomet er $\lambda^2 + p\lambda + q$. Vi kan generelt skrive tilhørende system som

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\-q & -p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y\\v\end{bmatrix}'$$

hvor $v = y'$. Det karakteristiske polynomet til matrisen blir

$$\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\-q & -p-\lambda\end{bmatrix} = \lambda(p+\lambda) + q = \lambda^2 + p\lambda + q.$$

Polynomene er like.