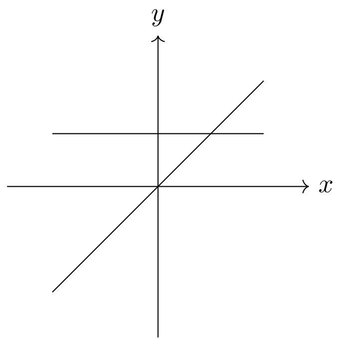
Løsningsforslag øving 1

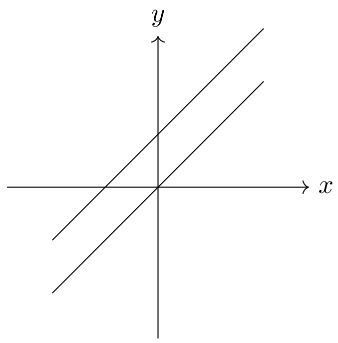
1.1. Likning (a) og (c) er lineære; (b) er ikke.

1.2. Det finnes mange eksempler som alle tilfredstiller at

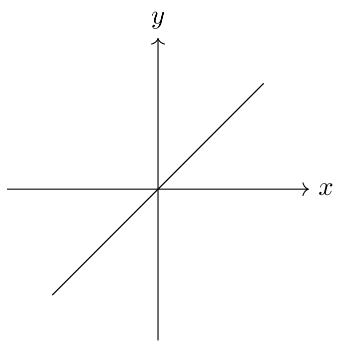
a) ... linjene skjærer hverandre i ett punkt:



b) ... linjene er parallelle:



c) ... linjene er helt like:



1.3.

a) En lineær likning med tre ukjente kan tegnes som ett plan i x–y–z-rommet.

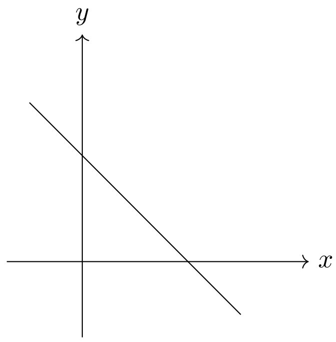
b) Likningen $z = 3$ svarer - geometrisk - til et plan som skjærer z-aksen normalt i $z = 3$. Vi gjenkjenner også

$$x + y + z = 5$$

som et plan i rommet. Begge likningene er oppfylt når planene skjærer hverandre. Ved å sette inn $z = 3$ i

$$x + y + 3 = 5$$

ser vi at $x + y = 2$. Løsningene ligger altså på linjen $x + y = 2$ i planet $z = 3$. Skisse av linjen sett ovenfra:



Prøv å skissere dette i x–y–z-rommet.

2.1. Matrise (a), (c) og (d) er på trappeform; (a) er på redusert trappeform.

2.2.

a) $x = \frac{5}{2}$, $y = 4$ og $z = -3$.

b) Radredusering viser at systemet har en fri variabel. Dette kan også observeres direkte ettersom siste likning er første likning multiplisert med to. Husk at vi nå har mange valg for å løse oppgaven, og vi gir derfor bare en skisse til hvordan du kan komme frem til et endelig svar. Eksempelvis kan vi ende opp med det ekvivalente systemet

$$\begin{cases} x + 3y + 6z = 4 \\ \quad\;\; y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Nå kan vi velge y eller z som fri variabel. Prøv gjerne ulike valg. Du kan sjekke om løsningene dine er korrekt ved å sette inn i likningene du opprinnelig skulle løse.

c) Det finnes ingen løsning.

2.3. Likningssystemene er ekvivalente fordi begge har entydig løsning $x = 1$, $y = 1$ og $z = 1$.

2.4. Hint: Teorem 2.2 sier at radekvivalente totalmatriser alltid er ekvivalente som likningssystem, de har altså like løsninger. Det holder derfor å vise at de korresponderende likningssystemene har ulike løsninger.

Merk: Vi ser at den eneste forskjellen på matrisene er at første- og tredje kolonne har byttet plass. Dette svarer til at første- og siste variabel bytter plass i korresponderende likningssystem. Kan du forklare dette?

2.5.

a) Kravene $p(1) = 2$, $p(2) = 3$ og $p(3) = 5$ gir følgende likningssystem:

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 5 \end{cases}$$

b) Løsningen er $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ og $c = 2$.

c) Sett inn 1, 2 og 3 i polynomet $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$ for å se at kravene i **a)** er oppfylt.

2.6.

La 1 betegne mulig og 0 umulig:

	$m < n$	$m = n$	$m > n$
ingen løsninger	1	1	1
én løsning	0	1	1
uendelig mange løsninger	1	1	1

2.7. Løsningen er

$$x = \frac{1}{ad - bc}(dm - bn)$$
$$y = \frac{1}{ad - bc}(an - cm).$$

Merk at $ad - bc \neq 0$ ettersom vi har antatt $ad \neq bc$.

2.8.

a) M er trivielt radekvivalent med M.

b) Hint: Alle radoperasjoner er reversible; multiplisere en rad med et ikke-null tall c kan reverseres ved å multiplisere samme rad med $\frac{1}{c}$; bytte om på to rader kan reverseres ved å bytte om på radene igjen; å legge til et multiplum av en rad til en annen kan reverseres ved å trekke fra det som ble lagt til. Dersom $M \sim N$ betyr det at vi har gjort et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_n$ for å lage N fra M. Klarer du, ut ifra dette, å finne et endelig antall radoperasjoner som lager M fra N?

c) Hint: Vi antar at det finnes et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_n$ som lager L fra M, og at det finnes et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_{n+1}, \ldots, \mathrm{O}_{n+m}$ som lager N fra L. Klarer du, ut ifra dette, å finne et endelig antall radoperasjoner som lager N fra M?