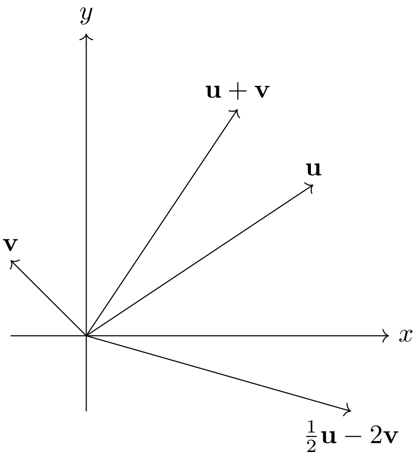
Løsningsforslag øving 2

TMA4110 høsten 2018

3.1.

a) $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\frac{1}{2}\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$.

b)



3.2. Se diskusjonen om matrise- og vektorligninger i kapittel **3**.

3.3.

a) Det er fire frie variabler. Husk at du kan sjekke om det endelige svaret ditt er riktig ved å multiplisere med A og se om resultatet faktisk blir null-vektoren.

b) Det finnes ingen løsning.

c) $x = \frac{83}{215}$, $y = \frac{187}{215}$ og $z = \frac{156}{215}$.

3.4.

a) Et vilkårlig valg av en vektor vil kunne skrives som en lineærkombinasjon av de to andre. Det er derfor tre mulige fremgangsmåter som alle er riktig. Hint: La $\mathbf{v}_1$ være en av vektorene. Du ønsker å sjekke om $\mathbf{v}_1$ er en lineærkombinasjon av de to resterende vektorene. Dette kan formuleres med likningen

$$\mathbf{v}_1 = a\mathbf{v}_2 + b\mathbf{v}_3$$

hvor $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er de to resterende vektorene, og a og b er ukjente koeffisienter. Spørsmålet er altså om denne likningen har en løsning; som kan sjekkes ved regning. Prøv å skissere løsningen din i x–y-planet.

b) Et vilkårlig valg av en vektor vil kunne skrives som en lineærkombinasjon av de to andre. Fremgangsmåte som i **a)**, men merk at du ikke kan skissere løsningen din ettersom dette krever fire dimensjoner.

3.5.

a) Hint: Vi ønsker å finne en vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ som ikke er en lineærkombinasjon av $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$. Vektoren skal altså *ikke* tilfredstille likningen

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

som har totalmatrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & a \\ 5 & 18 & b \\ -3 & 4 & c \end{bmatrix}.$$

Radreduser og velg a, b og c slik at systemet ikke har løsning. Eksempelvis fungerer $a = 0$, $b = 1$ og $c = 0$.

b) Hint: Som i **a)**, men nå er totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 3 & 4 & b \\ 3 & 4 & 5 & c \\ 4 & 5 & 6 & d \end{bmatrix}.$$

c) Hint: Som i **a)**, men nå er totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 & a \\ -8 & -7 & 3 & b \\ -4 & 5 & -8 & c \\ -6 & 6 & -4 & d \end{bmatrix}.$$

3.6.

a) Spørsmålet gir ikke mening siden vektorene i **5. a)** er vektorer i $\mathbb{R}^3$.

b) Hint: Ligningen i **3. b)** har ingen løsning.

c) Hint: Ligningen i **3. c)** har én løsning.

3.7. Planet som inneholder $\begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$ er akkurat det lineære spennet deres. Altså, alle vektorer på formen

$$a \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Alle valg av a og b er riktig.

3.8. Tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ spenner ut et parallellepiped. Disse ligger i et plan hvis og bare hvis volumet til dette parallellepipedet - determinanten - er lik null. Derfor må vi finne en tredje vektor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ slik at determinanten til $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ ikke er lik null. Matematisk formulert:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Det finnes mange valg av a, b og c som fungerer. Eksempelvis fungerer $\begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 20 \end{bmatrix}$. Likningen $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = 0$ har kun triviell løsning; $x = 0$, $y = 0$ og $z = 0$.

3.9. Introduksjon til løsning: Vi ønsker å beskrive problemet med lineær algebra. Et polynom er entydig bestemt av koeffisientene sine. Derfor kan all informasjon om et andregradspolynom $p(x) = ax^2 + bx + c$

lagres i vektoren $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Summen av to andregradspolynom

$$ax^2 + bx + c$$

og

$$dx^2 + ex + f$$

kan skrives

$$(a + d)x^2 + (b + e)x + (c + f).$$

Vi summerer altså koeffisientene foran tilhørende potens av x. Dette svarer akkurat til addisjon av tilhørende vektorer:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix}.$$

Tilsvarende blir en konstant multiplisert med et andregradspolynom multiplisert i hver koeffisient:

$$k \cdot (ax^2 + bx + c) = (k \cdot a)x^2 + (k \cdot b)x + (k \cdot c),$$

som svarer til skalarmultiplikasjon av tilhørende vektor:

$$k \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a \\ k \cdot b \\ k \cdot c \end{bmatrix}.$$

a) I dette lineær algebra-språket blir spørsmålet om $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$. Spørsmålet er altså om likningen

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix},$$

som svarer til totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & 18 & 8 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

har en løsning. Svaret er nei.

b) Hint: I lineær algebra-språk skal du finne en vektor $\mathbf{t}$ slik at alle vektorer $\mathbf{r}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ og $\mathbf{t}$. La $\mathbf{t}$ være løsningen du fant i oppgave **3.5** del **a)**. Du kan nå sjekke at likningen

$$x\mathbf{p} + y\mathbf{q} + z\mathbf{t} = \mathbf{r}$$

har en entydig løsning for alle valg av vektorer $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Det tilhørende polynomet t - til $\mathbf{t}$ - er altså en løsning på oppgaven.

Merk: Grunnen til at $\mathbf{t}$ fungerer er at den er lineært uavhengig av $\mathbf{p}$ og $\mathbf{q}$. Derfor får vi tre lineært uavhengige vektorer som til sammen spenner ut $\mathbb{R}^3$.

3.10. Eksempel; $m = 2$, $n = 2$. En vektor i $\mathbb{R}^2$ spenner ut en linje, altså ikke hele $\mathbb{R}^2$. Dette generaliseres til $\mathbb{R}^n$, svaret er altså nei.

Hint: Dersom m vektorer, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$, spenner ut $\mathbb{R}^n$ betyr dette at vi alltid kan løse likningen $x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_m = \mathbf{b}$ hvor $\mathbf{b}$ er en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$. Dette svarer til m likninger med n ukjente hvor $m < n$. Kan et slikt system alltid ha løsning?

Merk: Senere skal vi se at m vektorer spenner ut et underrom av dimensjon $\leq m$, altså kan de ikke spenne ut hele $\mathbb{R}^n$ dersom $m < n$.