4.1.

a) Gir ikke mening.

b) $\begin{bmatrix} -36 & 7 & 13 \\ 24 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -38 & 3 & 9 \\ 14 & 11 & 5 \\ -16 & -8 & -36 \end{bmatrix}$

d) Gir ikke mening.

e) Gir ikke mening.

f) $\begin{bmatrix} -11 \\ 26 \\ -68 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -290 \\ -192 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

i) 69

4.2. $\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

4.3. Den første har ingen løsninger; den andre har uendelig mange løsninger.

4.4. Hint: Du kan sjekke om en $n \times n$-matrise er inverterbar hvis du prøver å finne den inverse ved regning. Dette koker altså ned til å radredusere $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$.

a) Ikke inverterbar.

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

c) Ikke inverterbar (den er ikke kvadratisk).

d) Ikke inverterbar.

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4.5. La $\mathbf{e}_i$ være vektoren med 1 i komponent i og null ellers. Husk at for en $n \times n$-matrise er $A\mathbf{e}_i$ kolonnevektor nummer i. Vi kan derfor løse **a)** og **c)** direkte; det er jo kolonnevektorene til A som er oppgitt. I del **b)** og **d)** må vi skrive ut likningene vi får, og deretter løse dem direkte. Eksempelvis, hvis vi skriver $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ og setter inn kravene fra del **b)** får vi

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_3 + a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dette er fire likninger med fire ukjente. Tilsvarende fremgangsmåte fungerer i **d)**, men nå er A en 3×3-matrise. Du kan sjekke om det endelige svaret ditt er korrekt; tilfredstiller A kravene i oppgaven?

4.6.

a) Uttrykk X og B ved kolonnevektorer: $X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$. Nå kan vi reformulere $AX = B$ som $\begin{bmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$. Vi skal altså løse likningene $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ og $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$. Dette kan selvfølgelig gjøres samtidig.

b) Likningen som korresponderer til den første kolonnen i B har uendelig mange løsninger; den andre har ingen løsning.

4.7.

a) La $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$. I forrige oppgave ble likningene for kolonnevektorene $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$ uavhengige. Vi kunne altså finne x_1 og x_3 uten at dette påvirket x_2 og x_4, og vice versa. Dette er ikke sant i denne oppgaven.

b) Innfør notasjon for elementene i matrisene: $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$. Totalmatrisen blir - med denne notasjonen - da

$$\begin{bmatrix} a_1 + b_1 & b_3 & a_2 & 0 & c_1 \\ b_2 & a_1 + b_4 & 0 & a_2 & c_2 \\ a_3 & 0 & a_4 + b_1 & b_3 & c_3 \\ 0 & a_3 & b_2 & a_4 + b_4 & c_4 \end{bmatrix}.$$

Merk: avhengig av hvordan du nummererte likningene kan du ha en totalmatrise hvor radene er byttet om på.

c) Med oppgitte matriser blir totalmatrisen fra **b)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

som har løsning $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{3}$ og $x_4 = \frac{1}{3}$. Løsningen er altså

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

4.8.

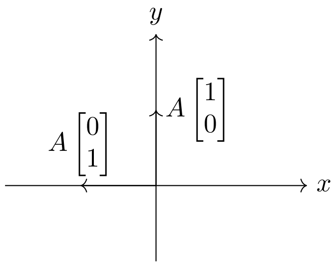
Vektoren må være på formen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ hvor a og b er reelle tall. Konstanten c kan være 0 eller 1. For $c = 1$ må $b = 0$ men vi kan velge a fritt. Dette svarer geometrisk til at vektorer som kun har komponent langs y-aksen blir null-vektoren ved multiplikasjon med A. For $c = 0$ må $a = 0$ men vi kan velge b fritt. Dette svarer geometrisk til at vektorer som kun har komponent langs x-aksen ikke påvirkes av multiplikasjon med A.

Hint: Vi ønsker at $A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, som gir likningene $a = c \cdot a$ og $0 = b \cdot c$. Det er nå to muligheter: 1) $c = 1$ og $b = 0$, eller 2) $c = 0$ og $a = 0$.

4.9.

a)

Vektorene blir rotert 90 grader mot klokken.



b) Del opp en vilkårlig vektor $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ i vektoren $a\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ langs x-aksen og $b\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ langs y-aksen. Husk at

$$A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = aA\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + bA\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Fra **a)** ser vi at hver komponent av vektoren roteres 90 grader mot klokken. Altså roteres hele vektoren 90 grader mot klokken.

c) Den omvendte geometriske operasjonen er å rotere 90 grader med klokken. Derfor skulle man tro at det finnes en matrise som gjør dette og er inversen til A.

d) Inversen til A: $A^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$. Du kan nå gjenta **a)-b)** med A^{-1} i stedet for A, og dermed sjekke at A^{-1} roterer en vektor 90 grader med klokken.

4.10.

a) Følger direkte fra definisjonen av matriseproduktet.

b) Hint: $A^\top = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^\top\\\mathbf{a}_2^\top\\\vdots\\\mathbf{a}_n^\top\end{bmatrix}$. Derfor blir

$$A^\top A = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^\top\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^\top\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^\top\mathbf{a}_n\\ \mathbf{a}_2^\top\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^\top\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^\top\mathbf{a}_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{a}_n^\top\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^\top\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^\top\mathbf{a}_n\end{bmatrix}.$$

Hva er antagelsen i oppgaven? Kan du fullføre oppgaven nå?

c) Matrisen A tilfredstiller kravene ettersom

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 1,$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 1,$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 0 \text{ og}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 0.$$

Inversen er derfor $A^{-1} = A^\top = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$. Du kan sjekke dette ved å bekrefte at både $AA^\top$ og $A^\top A$ er lik I.

5.1. Vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige og spenner ut $\mathbb{R}^2$.

Vektorene $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ og $\mathbf{w}_3$ er lineært avhengige og spenner ut $\mathbb{R}^2$.

5.2.

a) Radreduser matrisen med oppgitte vektorer som kolonner eller sjekk direkte at det ikke finnes noe tall c slik at:

$$\begin{bmatrix}1\\5\\-3\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}4\\18\\4\end{bmatrix}$$

b) Lik fremgangsmåte som oppgave 5 kapittel 3. Merk: Å finne en vektor som er lineært uavhengig av vektorene i **a)** svarer altså til å finne en vektor som ikke er en lineærkombinasjon av vektorene i **a)**.

c) Teorem 5.12 gir at de tre vektorene spenner ut $\mathbb{R}^3$.

Vektoren du fant i **b)** løser oppgave **9. b)** kapittel 3; husk at informasjonen om et andregradspolynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ kan lagres – entydig – i en vektor

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}.$$

De

5.3.

a) Ved å radredusere matrisen

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\3 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

ser vi at vi får en fri variabel dersom vi prøver å løse $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Eller ekvivalent har vi ikke et pivotelement i hver kolonne. Teorem 5.7 sier da at vektorene er lineært avhengige.

b) Lik fremgangsmåte som i del **b)** av forrige oppgave.

c) Du kan sjekke at to vilkårlige vektorer fra **a)** og vektoren du fant i **b)** er lineært uavhengige. Det er altså tre lineært uavhengige vektorer i det lineære spanet til vektorene i **a)** og **b)**. Derfor spenner vektorene $\mathbb{R}^3$ (Teorem 5.12).

5.4. Påstand **a)** og **b)** er usanne; **c)** er sann.

5.5.

a) Feil.
Hint: Husk at matriseproduktet $A\mathbf{v}$ er en lineærkombinasjon av kolonnene til A med komponentene til $\mathbf{v}$ som koeffisienter. Det finnes mange moteksempler ...

Mer Hint: Det kan være lurt å velge A slik at kolonnene er lineært avhengige.

b) Riktig.
Spesialtilfellet $t = 2$: Antagelsen er at $A\mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige.

Den kritiske observasjonen for å løse oppgaven: regneregler for matriser gir oss at hvis $\mathbf{u} = c\mathbf{w}$, så

$$A\mathbf{u} = A(c\mathbf{w}) = c(A\mathbf{w}).$$

To vektorer som ligger på samme linje – er lineært avhengige – ligger altså fortsatt på samme linje etter multiplikasjon med A (rent geometrisk).

Logisk konklusjon: Men vektorene $A\mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2$ er antatt lineært uavhengig, de ligger altså ikke på samme linje. Derfor kan ikke $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være lineært avhengig; hvis de var lineært avhengig ville $A\mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2$ vært lineært avhengig basert på observasjonen ovenfor.

Kan du nå løse oppgaven for en generell $t > 1$?
Hint: 'ligger på linje' betyr lineært avhengig i løsningen ovenfor.