5.1. Vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige og spenner ut $\mathbb{R}^2$.

Vektorene $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ og $\mathbf{w}_3$ er lineært avhengige og spenner ut $\mathbb{R}^2$.

5.2.

a) Radreduser matrisen med oppgitte vektorer som kolonner eller sjekk direkte at det ikke finnes noe tall c slik at:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) Lik fremgangsmåte som oppgave 5 kapittel 3.
Merk: Å finne en vektor som er lineært uavhengig av vektorene i **a)** svarer altså til å finne en vektor som ikke er en lineærkombinasjon av vektorene i **a)**.

c) Teorem 5.12 gir at de tre vektorene spenner ut $\mathbb{R}^3$.

Vektoren du fant i **b)** løser oppgave **9. b)** kapittel 3; husk at informasjonen om et andregradspolynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ kan lagres – entydig – i en vektor

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

De

5.3.

a) Ved å radredusere matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ser vi at vi får en fri variabel dersom vi prøver å løse $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Eller ekvivalent har vi ikke et pivotelement i hver kolonne. Teorem 5.7 sier da at vektorene er lineært avhengige.

b) Lik fremgangsmåte som i del **b)** av forrige oppgave.

c) Du kan sjekke at to vilkårlige vektorer fra **a)** og vektoren du fant i **b)** er lineært uavhengige. Det er altså tre lineært uavhengige vektorer i det lineære spanet til vektorene i **a)** og **b)**. Derfor spenner vektorene $\mathbb{R}^3$ (Teorem 5.12).

5.4. Påstand **a)** og **b)** er usanne; **c)** er sann.
Merk: **a)** er *nesten* riktig. Tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige dersom

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

kun har triviell løsning; $a = 0$, $b = 0$ og $c = 0$. Lineær avhengighet er det motsatte, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært avhengige dersom

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

har en ikke-triviell løsning; kan ta en av a, b og c ulik null. Dette er ekvivalent med at *en* av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av de to andre (del likningen med den koeffisienten som ikke er lik null). Påstanden i oppgaveteksten er at $\mathbf{u}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$. Men dette kan vi ikke garantere! Et eksempel: La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$ (en vilkårlig vektor langs y-aksen). Nå er de tre vektorene lineært avhengige i $\mathbb{R}^2$, men det finnes ikke a og b slik at $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$ fordi $\mathbf{u}$ ligger på x-aksen og de to andre ligger på y-aksen. Merk også at $\mathbf{w} = y\mathbf{v} + 0\mathbf{u}$ i dette tilfellet; $\mathbf{w}$ kan altså skrives som en lineærkombinasjon av de to andre.

5.5.

a) Feil.
Hint: Husk at matriseproduktet $A\mathbf{v}$ er en lineærkombinasjon av kolonnene til A med komponentene til $\mathbf{v}$ som koeffisienter. Det finnes mange moteksempler ...

Mer Hint: Det kan være lurt å velge A slik at kolonnene er lineært avhengige.

b) Riktig.
Spesialtilfellet $t = 2$: Antagelsen er at $A\mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige.

Den kritiske observasjonen for å løse oppgaven: regneregler for matriser gir oss at hvis $\mathbf{u} = c\mathbf{w}$, så

$$A\mathbf{u} = A(c\mathbf{w}) = c(A\mathbf{w}).$$

To vektorer som ligger på samme linje – er lineært avhengige – ligger altså fortsatt på samme linje etter multiplikasjon med A (rent geometrisk).

Logisk konklusjon: Men vektorene $A\mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2$ er antatt lineært uavhengig, de ligger altså ikke på samme linje. Derfor kan ikke $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være lineært avhengig; hvis de var lineært avhengig ville $A\mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2$ vært lineært avhengig basert på observasjonen ovenfor.

Kan du nå løse oppgaven for en generell $t > 1$?
Hint: 'ligger på linje' betyr lineært avhengig i løsningen ovenfor.

6.1.

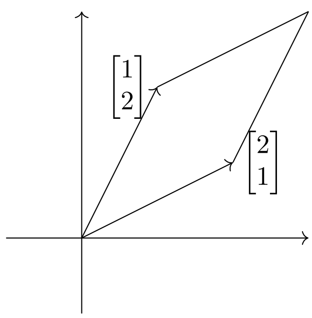
a) Determinanten er 0, kolonnene er lineært avhengige.

b) Determinanten er -3, kolonnene er lineært uavhengige.

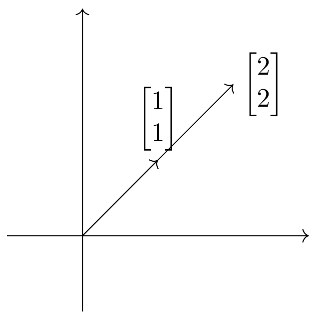
c) Determinanten er -14, kolonnene er lineært uavhengige. (Her kan det være lurt å bruke radoperasjoner for å beregne determinanten.)

6.2.

a) 3



b) 0



6.3. 430
Hint: Velg et referansepunkt og se på differansen fra de andre vektorene. Du har nå tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ som definerer T. Observer at T er en sjettedel av volumet til parallellepipedet definert av vektorene.

6.4. Vi kan anta at vinklene θ og φ ligger i intervallet $[-\pi, \pi)$.

a) Det er kun vinkelen φ som har noe å si for om determinanten er positiv, negativ eller 0. Determinanten er 0 hvis φ er 0 eller $-\pi$, og ellers har determinanten samme fortegn som φ.

b) Hvis vi øker α_1 eller α_2, så øker determinanten; hvis vi minsker en av disse, så minker determinanten.

Hvis vi varierer φ innenfor intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$, så øker determinanten når φ øker. I intervallene $[-\pi, -\pi/2]$ og $[\pi/2, \pi)$ er det omvendt.

Å variere θ har ingen effekt på determinanten.

c) $\det A = \alpha_1\alpha_2 \sin\varphi$

6.5.

a) $bcxy$

b) Vi må ha at b, c, x og y alle ikke er lik null.

6.6.

a) Sant.
Hint: En matrise er inverterbar hvis og bare hvis determinanten ikke er lik null. Vi vet også at $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Vi har antatt at $\det(AB) \neq 0$. Kan du fullføre beviset?

b) Sant.
Hint: $AA^{-1} = I$ og $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

c) Usant.

d) Sant. Produktregelen for determinant gir:

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) = (\det B)(\det A) = \det(BA)$$

6.7. Determinanten må være lik null.
Hint: Vi antar at $A\mathbf{u} - A\mathbf{v} = 0$ for $\mathbf{u} - \mathbf{v} \neq 0$. Ved regnereglene for matriser blir dette $A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0$. Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har altså en ikke-triviell løsning; $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Dette betyr – fra Teorem 5.7 – at kolonnene til A er lineært avhengige. Hva kan du nå si om determinanten til A?

6.8. $m \geq n$.
Skisse til løsning: Hva skjer hvis vi antar $m < n$? Svar: Siden kolonnene til A er vektorer i $\mathbb{R}^n$ og vi har $n > m$ vektorer, må kolonnene til A være lineært avhengige. Husk at

$$A^\top A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^\top \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^\top \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_2^\top \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^\top \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^\top \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n^\top \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^\top \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^\top \mathbf{a}_n \end{bmatrix},$$

hvor $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ er kolonnene til A. Du kan nå bruke at kolonnene til A er lineæret avhengige til å argumentere for at kolonnene til $A^\top A$ er lineært avhengige. Derfor må determinanten være lik null.

6.9. $\det(A \cdot A^\top) = 936$, $\det(A^\top \cdot A) = 0$.