Løsningsforslag øving 5

7.1. I svarene nedenfor vil vi liste opp egenvektorer, og deretter egenrommet til hver egenverdi i samme rekkefølge.

a) Egenverdier: 3, −1. Egenrom: linjen utspent av $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$.

b) Egenverdier: 3, −1, 0. Egenrom: Linjen utspent av $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

c) Egenverdi: 0. Egenrom: Linjen utspent av $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.
Merk: Dette er et eksempel på at geometrisk multiplisitet er strengt mindre enn algebraisk multiplisitet.

d) Egenverdi: 3, 8. Egenrom: Planet utspent av $\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$, linjen utspent av $\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$.
: Merk: Dette er et eksempel på at egenvektorer med lik egenverdi kan være lineært uavhengige.

7.2.

a) Egenverdi: 0,1. Egenrom: x-aksen og y-aksen.

b) Vektorer langs y-aksen blir null-vektoren ved multiplikasjon av A; vektorer langs x-aksen er uendret ved muliplikasjon av A.

7.3.

a) Egenverdi: 0,1. Egenrom: linjene utspent av $(1, 1)$ og $(-1, 1)$.

b) Vektorer langs $(1, -1)$-linjen blir null-vektoren ved multiplikasjon; vektorer langs $(-1, 1)$-linjen er uendret ved muliplikasjon.
Merk: Man kan tolke x-aksen som linjen utspent av $(1, 0)$ og y-aksen som linjen utspent av $(-1, 1)$. Dette er altså helt lik situasjonen som i forrige oppgave, men nå er egenrommene rotert med 45 grader.

7.4.

a) Dersom vi prøver å løse $\det(A - \lambda I) = 0$ får vi polynomlikningen $\lambda^2 + 1 = 0$. Denne har ingen (reelle) løsninger.

b) Matrisen roterer vektorer med −90 grader. Men en likning på formen $A\mathbf{x} = c\mathbf{x}$ betyr at A skalerer $\mathbf{x}$ med en faktor c uten at $\mathbf{x}$ roteres.

7.5.

a) $\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$

b) Matrisen er akkurat den som har svaret i del **a)** som kolonner:

$$T_\theta = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

c) Vi må ha $\theta = 0$; ingen rotasjon.

7.6.

a) Feil. Vi får generelt et n-tegradspolynom som kan ha alt fra null til n løsninger (det er maksimalt n egenverdier). Det har vært mange eksempler på dette tidligere i øvingen.

b) Sant. Vi har – per definisjon – en ikke-null vektor $\mathbf{x}$ som tilfredsstiller $A\mathbf{x} = c\mathbf{x}$ hvor $c \neq 0$. Derfor har vi funnet en vektor $\mathbf{x}$ slik at $A\mathbf{x}$ ikke er lik null-vektoren. Men da kan A umulig være null-matrisen; hvis alle elementene i A var lik null ville $A\mathbf{x}$ vært lik null for alle valg av $\mathbf{x}$.

c) Sant. Det er et eksempel i en tidligere oppgave.

7.7. Hint: Egenverdiene til A er løsninger på polynomet $\det(A - \lambda I) = 0$. Tilsvarende er egenverdiene til $A^\top$ løsninger på polynomet $\det(A^\top - \lambda I) = 0$. Observer at $(A - \lambda I)^\top = A^\top - \lambda I$. Bruk hintet i oppgaveteksten på matrisen $B = A - \lambda^\top$.

7.8.

a) Egenverdier: 1, 2, −5, 77.
Hint: Hva er determinanten til en matrise på trappeform?

b) Alle egenrommene blir éndimensjonale. Her er, for hver egenverdi λ_i, en egenvektor $\mathbf{v}_i$ som utspenner egenrommet til λ_i:

λ_i	1	2	−5	77
$\mathbf{v}_i$	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-5\\-6\\14\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}77\\76\\0\\1425\end{bmatrix}$

c) Nei. Vi må løse en fjerdegradslinking, som kan bli meget vanskelig. For generell n: Nei; vi må løse n-tegradslikninger.

7.9.

a) Vi vet at nullvektoren per definisjon ikke er en egenvektor. Vi ganger A med hver av de andre vektorene, og ser hva vi får:

$$A\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20\\40\\60\\80\end{bmatrix} = 20\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}3\\2\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}102\\74\\66\\18\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}28\\6\\4\\2\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}2\\1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}40\\20\\40\\60\end{bmatrix} = 20\begin{bmatrix}2\\1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}3\\2\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}120\\80\\40\\80\end{bmatrix} = 40\begin{bmatrix}3\\2\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}160\\120\\80\\40\end{bmatrix} = 40\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$$

Vi fant fire egenvektorer, tilhørende de to egenverdiene 20 og 40. Vi ser ganske lett at de to vektorene

$$\begin{bmatrix}3\\2\\2\\1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

ikke er egenvektorer.

b) La

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\2\\3\end{bmatrix}$$

være egenvektorene fra del (a) som hører til egenverdien 20, og la

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}3\\2\\1\\2\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$$

være egenvektorene fra del (a) som hører til egenverdien 40. Du kan sjekke at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige (ingen av dem er en skalar ganger den andre) og at $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$ er lineært uavhengige. Det betyr at

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{w}_1 \text{ og } \mathbf{w}_2$$

er lineært uavhengige, siden vi vet at det ikke kan finnes lineære avhengigheter mellom egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier (teorem 7.15 (a)).

(Merk at det er nødvendig å først sjekke at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige og at $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$ er lineært uavhengige. Du kan ikke bare bruke teorem 7.15 (a) direkte på alle de fire vektorene, fordi de ikke hører til fire forskjellige egenverdier.)

Hvis det nå finnes en vektor $\mathbf{u}$ som enten

1. ... er en egenvektor tilhørende 20 som ikke ligger i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, eller
2. ... er en egenvektor tilhørende 40 som ikke ligger i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, eller
3. ... er en egenvektor som tilhører en annen egenverdi enn 20 eller 40,

så får vi at

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2 \text{ og } \mathbf{u}$$

er fem lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^4$. Det er ikke mulig, så det kan ikke finnes noen slik vektor $\mathbf{u}$.

Dette betyr at vi har funnet alle egenverdier og egenvektorer for A, og de er:

Egenverdien 20 med egenrom $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$
Egenverdien 40 med egenrom $\mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$

7.10. Full løsning: Hvis c er en egenverdi tilfredsstiller den – per definisjon – $A\mathbf{x} = c\mathbf{x}$ for en ikkenull vektor $\mathbf{x}$. Kombiner dette med antagelsen om at $A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ for å se at $\mathbf{x}$ tilfredsstiller $c^2\mathbf{x} = c\mathbf{x}$. Omformuler denne likningen til $(c^2 - c)\mathbf{x} = 0$. Ettersom $\mathbf{x}$ ikke er null-vektoren, må en komponent i $\mathbf{x}$ ikke være lik null (hvorfor?), og derfor må $c^2 - c = 0$. Dette er en andregradslikning med løsning $c = 0$ eller $c = 1$.

7.11.

a) Vi vet at egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier er lineært uavhengige, og da følger det fra teorem 6.11 at matrisen V er inverterbar.

b) Vi regner ut

$$\begin{aligned}
V^{-1}AV &= V^{-1}\begin{bmatrix}A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & \cdots & A\mathbf{v}_n\end{bmatrix}\\
&= V^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}V^{-1}\lambda_1\mathbf{v}_1 & V^{-1}\lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & V^{-1}\lambda_n\mathbf{v}_n\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\lambda_1 V^{-1}\mathbf{v}_1 & \lambda_2 V^{-1}\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n V^{-1}\mathbf{v}_n\end{bmatrix}\\
&= D\begin{bmatrix}V^{-1}\mathbf{v}_1 & V^{-1}\mathbf{v}_2 & \cdots & V^{-1}\mathbf{v}_n\end{bmatrix}\\
&= DV^{-1}V\\
&= D,
\end{aligned}$$

der

$$D = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

er diagonalmatrisen bestående av egenverdiene til A.

Da kan vi dessuten legge merke til at vi har

$$A = VV^{-1}AVV^{-1} = VDV^{-1}.$$

(Oppgaven spurte ikke om dette, men det er likevel en interessant observasjon, og den hjelper oss med å løse neste deloppgave.)

c) Lag en diagonalmatrise D med egenverdiene på diagonalen, og en matrise V med egenvektorene som kolonner:

$$D = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad V = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 6 & 4\\ 2 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

Da ser du fra del (b) at matrisen $A = VDV^{-1}$ oppfyller kravene i oppgaven. Regn ut inversen til V på vanlig måte; da får du:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix}8 & -1 & -2\\ -2 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Nå kan du gange sammen matrisene og ende opp med:

$$A = VDV^{-1} = \begin{bmatrix}-9 & 2 & 2\\ -36 & 9 & 6\\ -22 & 4 & 6\end{bmatrix}$$