Løsningsforslag øving 6

8.1.

a) Matrisen har fire frie variabler og tre pivotelement. Dimensjonen på nullrommet er derfor lik fire, mens dimensjonen på kolonnerommet (og derfor også radrommet) er lik tre. For å finne en basis holder det å finne fire lineært uavhengige vektorer i nullrommet og tre lineært uavhengige vektorer i kolonnerommet (og radrommet).
Eksempel på valg av basis: Du kan ta kolonnene og radene som svarer til pivotelementene for å finne basis for kolonne- og radrommet; kolonnene som svarer til pivotelement er alltid lineært uavhengige, og vi har tre slike kolonner. Basis for kolonnerommet: kolonne 2, 5 og 6. Basis for radrommet: rad 1, 2 og 3. Matrisen er allerede radredusert, og likningene for nullrommet er

$$x_1 + x_2 + x_7 = 0$$

$$x_5 + x_7 = 0$$

$$x_6 + x_7 = 0.$$

Vi kan ta x_1, x_3, x_4 og x_7 som frie variabler. Da blir en parametrisering av nullrommet

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 - x_7 \\ x_3 \\ x_4 \\ -x_7 \\ -x_7 \\ x_7 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_7 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi kan f. eks ta

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som basis.

b)

Ved radredusering ser vi at det er en fri variabel og to pivotelement. Derfor er dimensjonen på kolonnerommet (radrommet) lik to og dimensjonen på nullromet lik en. Du kan finne en basis for alle underrommene på samme måte som i del **a)**.
Husk: Du kan sjekke om svaret ditt er riktig: Du trenger to lineært uavhengige vektorer i kolonnerommet (radrommet) og en ikke-null vektor i nullrommet. Ligger svaret ditt i ønsket underrom? Er vektorene i hvert underrom lineært uavhengige?

c) Vektoren ligger i nullrommet fordi

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

d) Vektoren ligger ikke i kolonnerommet til A fordi systemet med totalmatrise

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

umulig kan ha løsning; den siste raden svarer til likningen $0 = -1$.

Vektoren ligger i kolonnerommet til B; du kan sjekke at likningssystemet med totalmatrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

har løsning.

8.2.

a) Vi kan f. eks velge 1, x og x^2. En basis er – per definisjon – en samling som spenner ut og er lineært uavhengig.
Spenner ut: En vilkårlig vektor $a+bx+cx^2$ er trivielt en lineærkombinasjon $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2$ av 1, x og x^2.
Lineær uavhengig: Gitt en likning $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$, så må vi vise at vi kun har triviell løsning. Men et andregradspolynom kan maksimalt ha to nullpunkt, altså kan likningen umulig holde hvis ikke $a = 0$, $b = 0$ og $c = 0$; vi har kun triviell løsning.

b) I koordinatene til basisen vi valgte i **a)** svarer et polynom $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ til vektoren $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$. Spesielt blir $1 + 2x + 3x^3$ vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
Merk: Du innførte koordinater for å løse oppgave **3.9.**

8.3.

a) Ikke underrom; du kan f. eks sjekke at planet ikke går gjennom origo.

b) Underrom; du kan f. eks sjekke at $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en lineærkombinasjon av de to andre.

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ligger ikke i kolonnerommet (vektoren løfter kolonnerommet, som er et plan, opp fra origo); $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ligger i kolonnerommet (vektoren løfter ikke kolonnerommet, som er et plan, opp fra origo).
Prøv gjerne å tegne situasjonen i denne oppgaven.

8.4.

a) Usant. For eksempel får vi $\dim \operatorname{Col} A = 0$ hvis A er nullmatrisen.

b) Sant. Matrisen A består av n kolonnevektorer i $\mathbb{R}^m$ hvor $n > m$. Kolonnevektorene må derfor være lineært avhengige.

8.5. Snittet er et underrom; unionen er ikke nødvendigvis et underrom.
Union: Det er mange moteksempler. Du kan f. eks ta to linjer i $\mathbb{R}^2$ som kun krysser hverandre i origo.
Snitt: U_1 og U_2 inneholder null og er lukket under vektorromsoperasjonene. Husk at $U_1 \cap U_2$ betyr U_1 og U_2. Null-vektoren ligger i U_1 og U_2 og derfor i $U_1 \cap U_2$; summen av to vektorer i $U_1 \cap U_2$ ligger i både U_1 og U_2 igjen (U_1 og U_2 er underrom); et skalarmultiplum av en vektor i $U_1 \cap U_2$ ligger i både U_1 og U_2 igjen (U_1 og U_2 er underrom).

8.6.

a) La $M_{i,j}$ være $m \times n$-matrisen som har 1 i posisjon (i, j) og 0 ellers. Samlingen $M_{i,j}$, $i = 1, \dots m$, $j = 1, \dots n$ er en basis. Dimensjonen er antall element i en basis: mn.

b) U og W er underrom; V er ikke.

c) Basis for U: Matrisene $M_{i,i}$ for $i = 1, \dots, n$.
Dimensjonen til U: n
Basis for W: Matrisene $M_{i,j} + M_{j,i}$ for $i \neq j$ og $M_{i,i}$ for $i = j$.
Hint: Element (i, j) må være likt som element (j, i) for symmetriske matriser, derfor inneholder $M_{i,j} + M_{j,i}$ akkurat den informasjonen du trenger.
Dimensjonen til W: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (vi trenger bare å telle elementene langs og under diagonalen).

8.7.

a) Vektorrommene $\mathcal{P}_n$, for forskjellige n, er underrom av hverandre:

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \cdots$$

På samme måte er vektorrommene $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, for forskjellige n, også underrom av hverandre:

$$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^3(\mathbb{R}) \subset \cdots$$

For hver n har vi:

$$\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$$

Alle n-tegradspolynomer er polynomer; alle polynomer er uendelig mange ganger deriverbare; alle uendelig mange ganger deriverbare funksjoner er deriverbare n ganger; alle n ganger deriverbare funksjoner er kontinuerlige (deriverbar impliserer kontinuitet).

b) Du har vist at $\mathcal{P}_n$ har en endelig basis tidligere, og det er derfor endeligdimensjonalt. Vi har sett at $\mathcal{P}$ er uendeligdimensjonalt i notatet. Derfor er resten av vektorrommene uendeligdimensjonale; alle har et uendeligdimensjonalt underrom.

8.8. Ja, V er et vektorrom.

Additiv identitet: $\boxed{1}$, Additiv invers: $\boxed{1/a}$. Du kan nå sjekke aksiomene (V1)–(V8)

Hint: Parantes betyr hva man skal regne ut først.

8.9.

a) Nei.
$\mathbb{Z}$ er ikke lukket under skalarmultiplikasjon: Hvis du multipliserer et heltall med et reelt tall får du ikke nødvendigvis et heltall. Eksempel: $\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$ er ikke et heltall.

b) Nei.
Du kan for eksempel sjekke at $(ab) * n \neq a * (b * n)$ for alle valg av relle tall a og b, og heltall n.
Eksempel: $\lfloor \frac{1}{2} \cdot 1 \rfloor = 0$ slik at $2 * (\frac{1}{2} * 1) = 0$. Men

$$(2 \cdot \frac{1}{2}) * 1 = 1 * 1 = 1.$$

Merk: Vi viste altså at $\mathbb{Z}$ med denne skalarmultiplikasjonen umulig kan være et vektorrom. Mer generelt kan man vise at det ikke finnes noen vektorromstruktur på $\mathbb{Z}$. Dette henger sammen med at noen typer uendelig er større enn andre.

8.10. Vektorrommet må bestå av ett element; nullvektoren. Med en gang det finnes en ikke-null vektor $\mathbf{v}$ får vi uendelige mange vektorer; $t\mathbf{v}$ hvor t er et tall.

8.11. Det holder å vise at egenrommet til λ er lukket under vektorromsoperasjonene og inneholder nullvektoren.
Null-vektoren: Dette følger direkte fra definisjonen (egenrommet til λ består av egenvektorene og nullvektoren).
Addisjon: Hvis $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er to vektorer i egenrommet til λ har vi per definisjon at $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ og $A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$ (i spesialtilfellet $\mathbf{0}$ har vi alltid $A\mathbf{0} = \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$). Vi må vise at $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ er en egenvektor til λ:

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}),$$

$\mathbf{x} + \mathbf{y}$ er altså i egenrommet.
Skalarmultiplikasjon: Hvis $\mathbf{x}$ er i egenrommet til λ og c er en konstant har vi at

$$A(c\mathbf{x}) = c(A\mathbf{x}) = c(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x}),$$

som betyr at $c\mathbf{x}$ ligger i egenrommet til λ.

8.12.

a) For å svare på spørsmålet må vi utforske om det finnes konstanter a, b og c slik at

$$a\cos(x) + b\sin(x) + c\tan(x) = 0$$

for alle x i D. Velg $x = 0$ for å se at $a = 0$ ettersom $\sin(0) = 0$ og $\tan(0) = 0$. Vi har $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ som gir likningen

$$b\sin(x) = -c\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

for alle x i D . Sinus er aldri null for $x \neq 0$ i D slik at vi kan stryke $\sin(x)$ – på denne delen av D – og få likningen

$$\cos(x) = \frac{-c}{b}.$$

Men Cosinus er helt klart ikke konstant for alle $x \neq 0$ i D, så det kan ikke finnes noen ikke-trivielle løsninger. Vektorene er altså lineært uavhengige.

b) Ja.
Eksempel på løsning: La E være ett punkt i D (du kan velge dette punktet vilkårlig). En funksjon fra ett punkt til $\mathbb{R}$ er jo bare et tall i $\mathbb{R}$. Vektorrommet $\mathcal{C}(E)$ er altså bare vektorrommet $\mathbb{R}$. Tre vektorer (tall) i $\mathbb{R}$ er selvfølgelig lineært avhengige (vektorrommet er endimensjonalt).

8.13.

a) Hvis $\mathbf{0}_1$ og $\mathbf{0}_2$ er identitetselementer, så har vi:

$$\begin{aligned}\mathbf{0}_1 &= \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 &&\text{(V3), } \mathbf{0}_2 \text{ er identitetselement}\\ &= \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 &&\text{(V2)}\\ &= \mathbf{0}_2 &&\text{(V3), } \mathbf{0}_1 \text{ er identitetselement}\end{aligned}$$

b) Fra likheten $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ får du, ved å bruke aksiom (V2) på begge sider:

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$$

Vi vet fra aksiom (V4) at $\mathbf{u}$ har en additiv invers $-\mathbf{u}$. Legg til denne på hver side av likheten over; da får du:

$$(\mathbf{v} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u}) = (\mathbf{w} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u})$$

Bruk aksiom (V1) på begge sider:

$$\mathbf{v} + (\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) = \mathbf{w} + (\mathbf{u} + (-\mathbf{u}))$$

Bruk aksiom (V4):

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{w} + \mathbf{0}$$

Bruk aksiom (V3):

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

c) Bruk resultatet vist i del **b)**. Hvis to vektorer $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ begge er additive inverser til $\mathbf{u}$, så har vi

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{u} + \mathbf{w},$$

og da gir resultatet fra del **b)** at

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}.$$

8.14.

a) En naturlig basis for $\mathcal{P}_n$ er gitt av $1, x \ldots, x^n$. Dette er akkurat hva vi trenger for å få alle n-tegradspolynom. Basert på dette virker det rimelig at $\mathscr{B} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ er en basis for $\mathcal{P}$ (da burde vi akkurat ha det vi trenger for å få alle polynomer av vilkårlig grad).

b) Spenner ut: Et vilkårlig polynom kan skrives på formen $a_0 x^{i_0} + a_1 x^{i_1} + \cdots + a_k x^{i_k}$ hvor

$$i_0 < i_1 < \cdots < i_k$$

er naturlige tall. Men dette polynomet er automatisk en lineærkombinasjon av $x^{i_0}, x^{i_1}, \ldots, x^{i_k}$ som er en delmengde av $\mathscr{B}$.
Lineært uavhengig: Gitt en likning på formen

$$a_0 x^{i_0} + a_1 x^{i_1} + \cdots + a_k x^{i_k} = 0,$$

må vi vise at den kun har triviell løsning. Men dette er et i_k-tegradspolynom, og har derfor maksimalt i_k nullpunkt; polynomet kan umulig være null for alle tall x. Dette viser at vi kun har triviell løsning.
Dette viser at $\mathscr{B}$ spenner ut og er lineært uavhengig, som er definisjonen på en basis.