9.1.

a)

$$\begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 \\ -8 & -7 & 3 \\ -4 & 5 & -8 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Injektiv, ikke surjektiv.

b) Ikke lineær.

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Surjektiv, ikke injektiv.

9.2. Se på hva matrisen gjør med standardbasisen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Dette blir kolonnene i matrisen vi ønsker å finne.

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

9.3. Standardmatrisen til $S \circ R$ er:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Standardmatrisen til $R \circ S$ er:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Lineærtransformasjonen $S \circ R$ speiler planet om linjen $y = -2x$. Lineærtransformasjonen $R \circ S$ speiler planet om linjen $y = 2x$.

9.4.

a) Dette er standardbasisen 1, x og x^2.
Forklaring: Vi ønsker å skrive et vilkårlig andregradspolynom på formen $p(x) = p(0)f_1(x) + p'(0)f_2(x) + \frac{p''(0)}{2}f_3(x)$. Dette er akkurat hva $f_1 = 1$, $f_2 = x$ og $f_3 = x^2$ tilfredstiller: Gitt $p(x) = a + bx + cx^2$ ser vi at $p(0) = a$, $p'(0) = b$ og $\frac{p''(0)}{2} = c$ ved regning; dette er akkurat koeffisientene foran 1, x og x^2. Alternativ løsning: For en mer systematisk fremgangsmåte kan du følge metoden som er beskrevet i del **b)**.

b) Vi må finne tre polynom $e_(x)$, $e_2(x)$ og $e_3(x)$ som utgjør en basis slik at et vilkårlig polynom kan skrives på formen $p(x) = p(0)e_1(x) + p(1)e_2(x) + p(2)e_3(x)$ (da blir koordinatene $\begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$). Dette skjer akkurat dersom $e_1(x)$ tilfredstiller

$$e_1(0) = 1 \quad e_1(1) = 0 \quad e_1(2) = 0,$$

$e_2(x)$ tilfredstiller

$$e_2(0) = 0 \quad e_2(1) = 1 \quad e_2(2) = 0,$$

$e_3(x)$ tilfredstiller

$$e_3(0) = 0 \quad e_3(1) = 0 \quad e_3(2) = 1$$

(sett inn i likningen for $p(x)$ uttrykt ved e_i'ene for å se dette).

e_1: Polynomet kan skrives på formen $a_0 + a_1x + a_2x^2$, og vi krever – fra likningene for e_1 – ovenfor at

$$a_0 = 1 \quad a_0 + a_1 + a_2 = 0 \quad a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0.$$

Dette er tre likninger med tre ukjente, og vi bruker radreduksjon for å se at løsningen er $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{3}{2}$ og $a_2 = \frac{1}{2}$. Polynomet er derfor $e_1(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$. Alternativ løsning: $e_1(1) = 0$ og $e_1(2) = 0$ betyr at $(x - 1)$ og $(x - 2)$ er faktorer av e_1. Derfor må $e_1(x) = a(x - 1)(x - 2)$. Kravet $e_1(0) = 1$ gir nå $1 = a \cdot (-1) \cdot (-2)$ slik at $a = \frac{1}{2}$. Derfor er $e_1(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2)$. Du kan gange ut for å se at dette er det samme polynomet som vi fant ovenfor.
e_2: Samme fremgangsmåte som for e_1 – med litt forskjellige likninger – gir polynomet $e_2(x) = 2x - x^2$.
e_3: Samme fremgangsmåte som for e_1 – med litt forskjellige likninger – gir polynomet $e_3(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$.
Vi har nå tre polynom e_1, e_2 og e_3 som spenner $\mathcal{P}_2$ (det er konstruert slik at alle polynom kan skrives $p(x) = p(0)e_1(x) + p(1)e_2(x) + p(2)e_3(x)$). Det gjenstår kun å vise at de er lineært uavhengige. Men dette følger også fra hvordan e_i-ene er konstruert: Gitt en likning

$$x_1e_1(x) + x_2e_2(x) + x_3e_3(x) = 0$$

kan du sette inn for $x = 0, 1, 2$ for å se at $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ og $x_3 = 0$ på grunn av likningene som definerer e_i-ene.

c) Koordinatene til x^2:

$$[x]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \frac{p''(0)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$[x]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

d) Husk at en 3×3-matrise er bestemt av hvordan den endrer standardbasisen i $\mathbb{R}^3$.
T: I koordinatene til standardbasisen for $\mathcal{P}_2$ har vi at $[1]_{\mathscr{B}} = \mathbf{e}_1$, $[x]_{\mathscr{B}} = \mathbf{e}_2$ og $[x^2]_{\mathscr{B}} = \mathbf{e}_3$, hvor $\mathbf{e}_i$ er den i-te standardbasisen for $\mathbb{R}^3$, per definisjon av koordinater til en basis. Fra kommentaren ovenfor må vi ha at $T[1]_{\mathscr{B}} = [1]_{\mathscr{C}}$, $T[x]_{\mathscr{B}} = [x]_{\mathscr{C}}$, $T[x^2]_{\mathscr{B}} = [x^2]_{\mathscr{C}}$. Basisen $\mathscr{C}$ er konstruert slik at første koordinat er evaluering i 0, andre koordinat er evaluering i 1 og tredje koordinat er evaluering i 2. Derfor har vi

$$T = \begin{bmatrix} T\mathbf{e}_1 & T\mathbf{e}_2 & T\mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

S: Samme fremgang som for T. Husk at $e_1(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$, $e_2(x) = 2x - x^2$ og $e_3(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$.

I koordinatene til $\mathscr{B}$ har vi da at $[e_1]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $[e_2]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $[e_3]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Dette gir

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vi sjekker at matrisen gir riktig endring av koordinater for x^2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dette viser at S endrer koordinatene til x^2 som ønsket. Gjør tilsvarende regning for T.

9.5.

a)

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} T_\theta(\mathbf{e}_1) & T_\theta(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

b) Å bruke T_θ to ganger svarer til å rotere med en vinkel θ to ganger: $T_\theta \circ T_\theta = T_{2\theta}$. På matriseform har vi derfor

$$[T_\theta]^2 = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}.$$

Vi kan også regne ut dette produktet direkte:

$$[T_\theta]^2 = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix}.$$

Fra element $(1,1)$, eller $(2,2)$, ser vi at $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$.

9.6. Feil.
Lineærtransformasjonene $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ er på formen $T(x) = ax$ (vi kan tenke på konstanten a som en 1×1-matrise).

9.7.

a) Vi adderer og skalarmultipliserer lineærtransformasjoner på den åpenbare måten:

$$(T+S)(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}) + S(\mathbf{v})$$
$$(cT)(\mathbf{v}) = c \cdot (T(\mathbf{v}))$$

b) Definer en lineærtransformasjon

$$\varphi\colon \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathcal{M}_{m\times n}$$

ved at $\varphi(T)$ er standardmatrisen til T. Definer en lineærtransformasjon

$$\psi\colon \mathcal{M}_{m\times n} \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

ved at $\psi(A)$ er lineærtransformasjonen som har A som standardmatrise. Da er φ og ψ hverandres inverser, og vi får at $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathcal{M}_{m\times n}$.

9.8.

a) For å sjekke om en funksjon $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ er lineær, må vi sjekke to krav: i) $T(p_1(x)+p_2(x)) = T(p_1(x)) + T(p_2(x))$ for alle polynom $p_1(x)$ og $p_2(x)$, og ii) $T(c \cdot p(x)) = cT(p(x))$ for alle polynom $p(x)$ og skalarer c.
D: Se oppgaven som mer generelt tar for seg derivasjon av glatte funksjoner. Alternativ løsning: Et polynom er på formen $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Derivasjon av p er $D(p(x)) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$. Du kan eksplisitt sjekke at denne formelen er lineær (tilfredstiller i) og ii)).
G: i)

$$\begin{aligned} G(p_1(x) + p_2(x)) &= x \cdot (p_1(x) + p_2(x)) \\ &= x \cdot p_1(x) + x \cdot p_2(x) \\ &= G(p_1(x)) + G(p_2(x)). \end{aligned}$$

ii)

$$G(c \cdot p(x)) = x \cdot (c \cdot p(x)) = c \cdot (x \cdot (x)) = cG(p(x)).$$

Bildet til D er alle polynom som kan skrives som den deriverte til et annet polynom. Gitt et polynom

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

ser vi at

$$P(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

er en antiderivert til p; $P' = p$. Men dette betyr jo akkurat at $p = D(P)$. Så bildet til D er $\mathcal{P}$; alle polynom kan skrives som den deriverte til en antiderivert.
Kjernen til D er alle polynom som sendes til null, dvs. alle polynom som har derivert lik null. Dette er de konstante polynomene. Kjernen til D er alle konstante polynom.

b) Bildet til G er alle polynom $p(x)$ som kan skrives på formen $p(x) = G(q(x))$ for et polynom $q(x)$. Med andre ord $p(x) = xq(x)$. Bildet er derfor alle polynom som har x som en faktor, eller – ekvivalent – minst et nullpunkt i $x = 0$.
Kjernen til G er alle polynom som sendes er lik 0 hvis vi multipliserer det med x. Dette er kun sant for null-polynomet. Kjernen til G består kun av null-polynomet.

c) Husk at en lineærtransformasjon $T : V \to W$ er injektiv hvis og bare hvis kjernen kun består av null-vektoren; surjektiv hvis og bare hvis bildet er W (vi treffer alt).
Fra forrige deloppgave følger det at D er surjektiv, men ikke injektiv; G er injektiv, men ikke surjektiv.

d) Hvis vi bruker produktregelen for derivasjon (matte 1), ser vi at

$$(x \cdot p(x))' = x' \cdot p(x) + x \cdot p'(x) = p(x) + x \cdot p'(x).$$

Dermed får vi:

$$D(G(p(x))) = p(x) + G(D(p(x)))$$

Dette betyr at

$$(D \circ G)(p) - (G \circ D)(p) = p$$

for ethver polynom p, og det vil si at

$$(D \circ G) - (G \circ D) = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$$

e) La $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$ være polynomene gitt ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0(x) &= 1 & \qquad \mathbf{e}_2(x) &= x^2 \\ \mathbf{e}_1(x) &= x & \qquad \mathbf{e}_3(x) &= x^3 \end{aligned}$$

Da er $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ en basis for $\mathcal{P}_2$, og $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ en basis for $\mathcal{P}_3$.

Med hensyn på disse basisene får vi følgende matriser:

$$\text{Matrisen for } D_3\text{:} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matrisen for } G_3\text{:} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9.9.

a) T må være injektiv, og S må være surjektiv.

b) Vi får at $\dim U = \dim W$ siden $U \cong W$, og $\dim V \geq \dim U$ siden T er injektiv.

9.10.

a) Derivasjonsreglene fra matte 1:

$$(f+g)' = f' + g',$$
$$(cf)' = cf'.$$

Funksjonen vår er derivasjon; $D(f) = f'$. Likningene fra matte 1 kan omformuleres til

$$D(f+g) = D(f) + D(g),$$
$$D(cf) = cD(f).$$

Dette er definisjonen på at D er lineær.

b) Kjernen til D, $\ker D$, er definert som alle glatte funksjoner f slik at $f' = 0$. Kjernen er, med andre ord, alle løsningene på differensiallikningen $f' = 0$. Dette er de konstante funksjonene $f(x) = c$ hvor c er et reelt tall. Vi kan ta $f = 1$ som en basis for kjernen; en vilkårlig $g(x) = c$ i kjernen er da $g = cf$. Dette betyr at kjernen er endimensjonal og spesielt er den endeligdimensjonal.

c) En egenvektor til D med egenverdi λ, er en vektor/funksjon f slik at $D(f) = \lambda f$, eller $f' = \lambda f$. Dette er en differensiallikning med generell løsning $x_0 e^{\lambda x}$. Spesielt betyr dette at alle valg av λ gir egenverdier til D.

d) Ja.
Forklaring: D er surjektiv hvis det for alle glatte funksjoner f, finnes en glatt funksjon F slik at $f = D(F)(= F')$. Husk at fundamentalteoremet i analyse sier at $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (for alle valg av a, vi kan f. eks ta $a = 0$) er en antiderivert til f. Men dette betyr at $f = F' = D(F)$. Er F glatt? $F' = f$, så den er en gang deriverbar, og $F^{(n+1)} = f^{(n)}$ for $n > 1$, så den er glatt fordi f er glatt. Vi har derfor funnet en glatt F som tilfredstiller $D(F) = f$ for en vilkårlig vektor f.