10.1. Du skal skrive z på formen $a + ib$ og uttrykke real- og imaginærdelen til uttrykkene ved a og b.

10.2.

a) $-11 - 2i$

b) $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

c) $-\frac{33}{169} + \frac{56}{169}i$

10.3.

a) $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{19}i)$

b) $\sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{6}i}$, $\sqrt[3]{2}e^{\frac{5\pi}{6}i}$, $\sqrt[3]{2}e^{9\frac{\pi}{6}i}$

c) $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$, $\sqrt[4]{2}e^{\pi i}$, $\sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi}{2}i}$

d) $2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ gir: $2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{9\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{17\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{25\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{33\pi}{20}i}$

10.4. Hint: Skriv $z = a + ib$ og $w = c + id$. Regn ut høyre- og venstre side av ligningen.

10.5.

a)

$$(\cos x + i\sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{nx} = \cos nx + i\sin nx.$$

b) Skriv $z = re^{i\theta}$. Da har vi at $\overline{z} = re^{-i\theta}$. Vi regner litt på venstre side av likheten vi ønsker å vise:

$$(\overline{z})^n = r^n e^{-nx}.$$

Bruk del **a)** for å se at

$$(\overline{z})^n = r^n(\cos(-nx) + i\sin(-nx)).$$

Men cosinus er like og sinus er odde slik at

$$(\overline{z})^n = r^n(\cos(nx) - i\sin(nx)).$$

Nå regner vi litt på høyre siden:

$$(\overline{z^n}) = \overline{r^n e^{ni\theta}}.$$

Euler gir:

$$(\overline{z^n}) = \overline{r^n\cos(nx) + ir^n\sin(nx)}$$

som igjen gir

$$(\overline{z^n}) = r^n\cos(nx) - ir^n\sin(nx).$$

Dermed ser vi at høyre side er lik vesntre siden.
Alternativ løsning: Du kan enkelt vise at $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$ for to komplekse tall z og w. Dette gir umiddelbart resultatet for $n = 2$ (ta $w = z$). La oss fortsette med induksjon. Anta at påstanden er sann for z^n. Da ser vi – ta $w = z^n$ ovenfor – at

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n}\overline{z}.$$

Induksjonshypotesen er at

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n.$$

Sett inn for å se at

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z}^{n+1}.$$

Vi har dermed vist påstanden med induksjon.

10.6.

a) Euler gir: $e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})$. Bruk at cos er en like funksjon og sin er en odde funksjon for å se at $e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \cos(\frac{3\pi}{4}) - i\sin(\frac{3\pi}{4})$. Nå kan vi regne ut at

$$e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -2i\sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

b) $\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = e^{i(\frac{3\pi}{4} - (-\frac{3\pi}{4}))} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

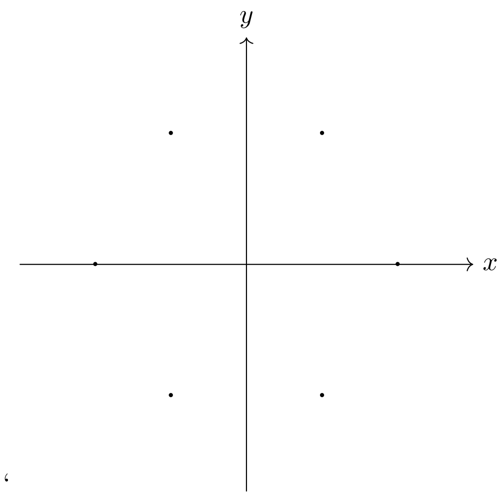
c) Polar Form: Veldig enkelt å multiplisere/addere som del **b)** illustrerer; vanskelig å addere som del **a)** illustrerer.
Kartesisk: Her blir det motsatt: Enkelt å addere; vanskelig å dele.

10.7.

a) $2e^{\frac{2\pi i}{3}}$

b) $(-1 + i\sqrt{3})^6 = (2e^{\frac{2\pi i}{3}})^6 = 64e^{4\pi i} = 64.$

c) $2, 2e^{\frac{\pi i}{3}}, 2e^{\frac{2\pi i}{3}}, -2, 2e^{\frac{4\pi i}{3}}, 2e^{\frac{5\pi i}{3}}$



10.8.

a) Vi har at $(z-1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$ slik at $z = 1$ er en trippelrot.
Aletrnativt kan du gjette på løsningen $z = 1$ og deretter bruke polynomdivisjon.

b)

Fra **a)** har vi at likningen kan skrives på formen

$$(z-1)^3 = 1 = e^{2\pi i}.$$

Tredjerøttene til 1 er

$$e^{\frac{2\pi}{3}}, \quad e^{\frac{4\pi}{3}}, \quad 1.$$

Dermed har vi tre løsninger for $z - 1$ som igjen gir tre løsninger for z:

$$z = 1 + e^{\frac{2\pi}{3}}, 1 + e^{\frac{4\pi}{3}}, 2.$$

Tredjerøttene til 1 ligger uniformt fordelt på sirekelen sentrert i origo med radius 1, men er forskjøvet til å ligge uniformt fordelt på sirkelen sentrert i $(1,0)$ med radius 1.

10.9.

a) Vi følger den vanlige metoden for å finne n-terøtter: Skriv 1 på polar form; $1 = e^{(2\pi k)i}$, k et heltall. Ta tredjeroten for å få $\sqrt[3]{1} = e^{(\frac{2\pi k}{3})i}$, k heltall. Dette gir ulike komplekse tall for $k = 0, 1, 2$:

$$1, \quad e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

Dette er tre punkter uniformt fordelt på sirkelen sentrert i origo med radius 1. Dersom vi trekker rette linjer mellom punkter etter økende vinkel får vi en trekant med røttene som hjørner.

b) Som i **a)** gir

$$1, \quad i, \quad -1, \quad -i.$$

Den geometriske figuren blir en firkant med hjørner i røttene.

c) Som i **a)** gir

$$1, \quad e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad e^{\frac{4\pi i}{n}}, \ldots, e^{\frac{(n-1)\pi i}{n}}.$$

Den geometriske figuren blir en n-kant med hjørner i røttene.

d) Vi får fortsatt en n-kant med hjørner i røttene. Forklaring: Et komplekst tall kan skrives på formen $re^{i\theta}$ hvor $r > 0$ er et reelt tall. Nå blir n-terøttene $\sqrt[n]{r}e^{(\theta+\frac{2\pi k}{n})i}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (en hel runde i det komplekse planet). Dette er en uniform fordeling av n punkter på sirkelen sentrert i origo med radius $\sqrt[n]{r}$.

10.10. Vi har at

$$a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \ldots + a_1 w + a_0 = 0.$$

Konjugering av hele ligningen gir

$$a_n(\overline{w})^n + a_{n-1}(\overline{w})^{n-1} + \ldots + a_1(\overline{w}) + a_0 = 0,$$

men tidligere har du vist at $(\overline{w})^n = (\overline{w^n}$, slik at

$$a_n \overline{w}^n + a_{n-1} \overline{w}^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{w} + a_0 = 0.$$

10.11. Nei.
Løsning: Skriv tallene på polar form, $z = re^{i\theta}$ og $w = \rho e^{i\phi}$. Nå kan produktet uttrykkes $zw = r\rho e^{i(\theta+\phi)}$, hvor $r\rho > 0$. Derfor er produktet forskjellig fra null. Alternativ løsning: Du kan også løse oppgaven ved å skrive z og w på formen $a + ib$.

10.12. Ja.
Røttene til r fordeles uniformt langs sirkelen om origo med radius $\sqrt[n]{r}$, og $\sqrt[n]{r}$ er en n-terot. Vi har sett eksempler på dette tidligere i øvingen.

10.13. Operasjonene $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ og $r(a + ib) = (ra) + i(rb)$ er helt like som operasjonene på $\mathbb{R}^2$ dersom vi tenker på $a + ib$ som et punkt (a, b) i planet. Dermed er $\mathbb{C}$ helt likt $\mathbb{R}^2$ (bortsett fra at vektorene ser litt annerledes ut).

10.14. Definer følgende funksjoner

$$T(a + ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

og

$$S(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}) = a + ib.$$

Du kan sjekke at T og S er lineære. Du kan også sjekke at S og T er inverser av hverandre;

$$S(T(a + ib)) = a + ib,$$

og

$$T(S(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Derfor er både T og S isomorfier mellom vektorrommene.