11.1. Ligningssystemet

$$\begin{array}{lll}(1+i)z & -w & = i \\ (1-i)z & +(1+i)w & = 1\end{array}$$

kan skrives som matriseligningen

$$\begin{bmatrix}1+i & -1 \\ 1-i & 1+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z \\ w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}i \\ 1\end{bmatrix}$$

Ligningen har entydig løsning

$$\begin{bmatrix}z \\ w\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+i \\ 0\end{bmatrix}.$$

11.2. Vi vet at kolonenne til en kvadratisk matrise er lineært avhengige hvis, og bare hvis, determinanten er 0.

a) Her er $\det(A) = 0$ så vi vet at kolonnene er lineært avhengige. Radreduserer vi matrisen får vi systemet

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y \\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$$

Her har vi én nullrad som betyr at nullrommet har dimensjon 1. Vi velger $z = t$ som fri kompleks variabel og får at $x = t$ og $y = -2t$ som betyr at nullrommet er

$$\text{null}(A) = \text{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1 \\ -2 \\ 1\end{bmatrix}\right\} = t\begin{bmatrix}1 \\ -2 \\ 1\end{bmatrix}$$

b) Matrisen har determinant ulik 0. Derfor er kolonnene lineært uavhengige, og nullrommet inneholder kun vektoren $\begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$.

c) Her er determinanten lik 0 så kolonnene er lineært avhengige. Vi finner radredusert form

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

for så å finne nullrommet. Dette er den samme matrisen som den vi fikk i a) og nullrommet blir derfor likt.

11.3.

a) Determinanten er -2 og egenverdiene er -2, i og $-i$. Egenrommene er utspent av de korresponderende egenvektorene

$$\begin{bmatrix}0 \\ 1 \\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}i \\ 1 \\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-i \\ 1 \\ 1\end{bmatrix}$$

b) Her er determinanten 2 og vi har karakteristisk polynom

$$(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

som gir egenverdier $\lambda = -1$ og $\lambda = 2$.

c) Determinanten er 20 og karakteristisk polynom er

$$(\lambda-2)^2(\lambda-5)$$

d) Determinanten er 27 og egenverdiene er $\lambda = 3$ med multiplisitet 3

11.4. Hvis vi ganger sammen egenverdiene *med* multiplisitet får vi

$$\begin{aligned}(-2)i(-i) &= -2 \\ (-1)^2 2 &= 2 \\ 2^2 \cdot 5 &= 20 \\ 3^3 &= 27\end{aligned}$$

altså nøyaktig determinantene til de respektive matrisene.

11.5. Ved samme fremgangsmåte som kapittel 3, oppgave 5, kan vi f. eks se at

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix}1 \\ 1 \\ 1\end{bmatrix}$$

er lineært uavhengig av vektorene i oppgaveteksten. Videre kan du sjekke at de to gitte vektorene også er lineært uavhengige. Vi har altså tre lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{C}^3$, som derfor spenner ut $\mathbb{C}^3$.

11.6. Vi ønsker å velge a slik at vi har en lineærkombinasjon

$$\begin{bmatrix}a \\ 6-6i \\ -12\end{bmatrix} = b\begin{bmatrix}-3 \\ 2i \\ 8\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1 \\ 1 \\ 2\end{bmatrix},$$

ekvivalent har matriseligningen

$$\begin{bmatrix}a \\ 6-6i \\ -12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 1 \\ 2i & 1 \\ 8 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b \\ c\end{bmatrix}$$

en løsning. Dette gir at $b = -3$ og $c = 6$ slik at

$$a = 3b + c = 15$$

11.7. Vi antar at A har egenverdi λ. Dette betyr at det finnes en $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ slik at

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Multipliser begge sidene av ligningen med A for å få

$$A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}).$$

Vi kan flytte på paranteser, dra ut konstanter og bruke at $\mathbf{v}$ er en egenverdi til A for å se at

$$A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(A\mathbf{v}) = \lambda(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}.$$

Dette betyr at λ^2 er en egenverdi til matrisen A^2.

11.8. Vi setter som vanlig opp matrisen

$$T_\theta - \lambda I = \begin{bmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{bmatrix}$$

og beregner determinanten

$$\det(T_\theta - \lambda I) = \lambda^2 - 2\cos\theta + 1$$

Ved nå å bruke abc-formelen får vi at

$$\lambda = \frac{2\cos\theta \pm 2\sqrt{\cos^2\theta - 1}}{2}$$

som blir

$$\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

Hvis vi ser på denne komplekse egenverdien som en vektor i planet er det nøyaktiv vektoren som peker i samme retning som $\mathbf{e}_1$ rotert med/mot klokken med θ radianer. Fra tidligere øvinger vet vi at $T_{2\theta} = T_\theta \cdot T_\theta = T_\theta^2$. Fra oppgave 7 vet vi derfor at egenverdiene til $T_{2\theta}$ er λ^2

$$\lambda^2 = (\cos\theta \pm i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta \pm \sin 2\theta$$

og så husker vi at $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ for å få det vi forventet, altså at hvis vi dobler vinkelen i T_θ dobler vi vinkelen i egenverdien.

11.9. Her må vi finne den beste raden/kolonnen for å regne ut determinanten.

a) Regner vi ut determinanten langs den første raden får vi determinanten

$$i(i^2 - 1^2) - 0 + 0 = -2i$$

b) Her kan vi velge første rad eller første kolonne. Vi velger første kolonne og får determinanten

$$i \det \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

Den første determinanten er samme som i oppg a) og den andre ligner. Vi får at determinanten er

$$2 + 2i$$

c) Vi velger å regne ut determinanten langs første kolonne. Det gir

$$i \det \begin{bmatrix} i & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

Her ser vi at den første determinanten er kjent, og den andre regner vi ut langs første kolonne og får at determinanten til slutt blir $2 + 2i$ som i b)

Oppgave d) og e) er tilsvarende: nøst deg nedover ved å velge en lur rad/kolonne å beregne determinanten fra.

11.10. Vi fant egenverdiene og egenvektorene i oppgave 3. Hvis vi setter disse opp i matrisen P får vi

$$P = \begin{bmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

som gir oss

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

som er en diagonalmatrise hvor elementene er egenverdiene til A.

11.11. Vi regner ut det karakteristiske polynomet som vanlig og får

$$\lambda^2 - 8\lambda = \lambda(\lambda - 8)$$

som betyr at egenverdiene er 0 og 8. Her kan vi observere at determinanten til matrisen er 0 siden den første raden er halvparten av den andre.

11.12. Anta at null er en egenverdi til en matrise A.
Ønsker: A er singulær. Vi har sett mange ekvivalente formuleringer av singulær. En av dem er at det finnes en ikke-null løsning av ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Antagelsen: Det finnes en ikke-null vektor $\mathbf{v}$ slik at $A\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Observasjon: Vi ser at egenvektoren $\mathbf{v}$ er en ikke-null løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Konklusjon: A er singulær, som er det vi ønsket å vise.