Løsningsforslag øving 10

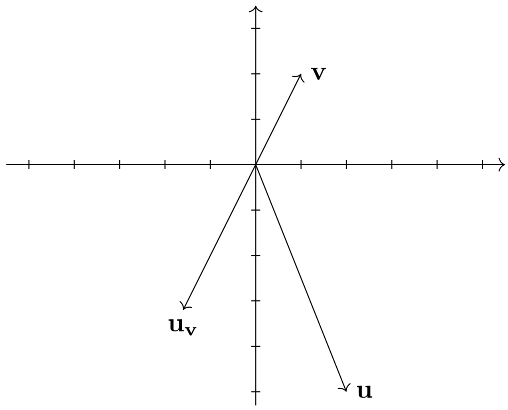
TMA4110 høsten 2018

12.1.

$$\begin{bmatrix} 1-i & 2 & 2+i \\ 1+i & i & 1-i \end{bmatrix}$$

12.2. Projeksjonen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ er:

$$\mathbf{u_v} = \frac{\mathbf{v}^*\mathbf{u}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot(-5)}{1^2+2^2}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-8/5\\-16/5\end{bmatrix}$$



12.3. For å finne ut om en matrise P representerer en projeksjon, må vi sjekke om $P^2 = P$.

a) $\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}0&0\\2&1\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}0&0\\2&1\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

Konklusjon: Matrisene i del **a)**, **b)**, **c)** og **f)** representerer projeksjoner; matrisene i del **d)** og **e)** representerer ikke projeksjoner.

12.4.

a) Indreproduktet av de to vektorene er:

$$\begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix}^* \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = 2\cdot 1 + (-5)\cdot 2 + 1\cdot 0 = -8$$

Siden indreproduktet ikke er 0, er vektorene ikke ortogonale.

b) Vi ser på indreproduktet av hvert par av vektorer:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}^* \begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}^* \begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}^* \begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} = 0$$

Alle de tre vektorene er ortogonale til hverandre.

c) Vi ser på indreproduktet av hvert par av vektorer:

$$\begin{bmatrix}i\\0\\1\end{bmatrix}^* \begin{bmatrix}i\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-i & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i\\1\\0\end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix}i\\0\\1\end{bmatrix}^* \begin{bmatrix}1\\i\\i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-i & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\i\\i\end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix}i\\1\\0\end{bmatrix}^* \begin{bmatrix}1\\i\\i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-i & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\i\\i\end{bmatrix} = 0$$

Vektorene $(i,0,1)$ og $(i,1,0)$ er altså ikke ortogonale, men vektoren $(1,i,i)$ er ortogonal til hver av de to andre.

12.5.

a) Vi får:

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{u}} &= \frac{1}{\mathbf{u}^*\mathbf{u}}\cdot(\mathbf{u}\mathbf{u}^*) \\
&= \frac{1}{2^2+(-5)^2+1^2}\begin{bmatrix}2\cdot 2 & 2\cdot(-5) & 2\cdot 1\\ -5\cdot 2 & -5\cdot(-5) & -5\cdot 1\\ 1\cdot 2 & 1\cdot(-5) & 1\cdot 1\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}2/15 & -1/3 & 1/15\\ -1/3 & 5/6 & -1/6\\ 1/15 & -1/6 & 1/30\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$P_{\mathbf{u}^\perp} = I_3 - P_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix}13/15 & 1/3 & -1/15\\ 1/3 & 1/6 & 1/6\\ -1/15 & 1/6 & 29/30\end{bmatrix}$$

$$P_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix}13/15 & 1/3 & -1/15\\ 1/3 & 1/6 & 1/6\\ -1/15 & 1/6 & 29/30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-8/15\\4/3\\-4/15\end{bmatrix}$$

$$P_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{v} = \begin{bmatrix}13/15 & 4/3 & 14/15\\ 4/3 & 1/6 & 7/6\\ 14/15 & 7/6 & 29/30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}23/15\\2/3\\4/15\end{bmatrix}$$

I de neste delene viser vi ikke all mellomregningen, men bare resultatene.

b)

$$P_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & 0 & 0\\ -1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix} \qquad P_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$P_{\mathbf{u}^\perp} = \begin{bmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix} \qquad P_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

c) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}i\\0\\1\end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}i\\1\\0\end{bmatrix}$

$$P_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix}1/2 & 0 & i/2\\ 0 & 0 & 0\\ -i/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix} \qquad P_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix}i/2\\0\\1/2\end{bmatrix}$$

$$P_{\mathbf{u}^\perp} = \begin{bmatrix}1/2 & 0 & -i/2\\ 0 & 1 & 0\\ i/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix} \qquad P_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{v} = \begin{bmatrix}i/2\\1\\-1/2\end{bmatrix}$$

12.6. Vi kan sjekke at vektorene

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige på vanlig måte (kombiner dem til en matrise, gausseliminer og sjekk at det blir pivotelementer i alle kolonner). Det betyr at de utgjør en basis for $\mathbb{R}^3$. Videre sjekker vi at de er en ortogonal basis ved å sjekke at hver av dem er ortogonal til begge de andre.

Når vi vet at vi har en ortogonal basis, kan vi finne koordinatene til en vektor med hensyn på basisen ved å projisere vektoren ortogonalt på hver basisvektor:

$$P_{\mathbf{b}_1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\mathbf{b}_1$$
$$P_{\mathbf{b}_2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{2}{3}\mathbf{b}_2$$
$$P_{\mathbf{b}_3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 0\mathbf{b}_3$$

Koeffisientene til vektoren $(1, 1, 1)$ med hensyn på basisen $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ er altså $(1/3, 2/3, 0)$.

12.7.

a) Vi bruker Gram–Schmidt-ortogonalisering, og får:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} - P_{\mathbf{u}_1}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}23/15\\2/3\\4/15\end{bmatrix}$$

Da er $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ en ortogonal basis. Vi finner en ortonormal basis ved å dele hver basisvektor på lengden sin:

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}2/\sqrt{30}\\-5/\sqrt{30}\\1/\sqrt{30}\end{bmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_2\|}\mathbf{u}_2 = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{43}}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}23\sqrt{15}/15\sqrt{43}\\2\sqrt{15}/3\sqrt{43}\\4\sqrt{15}/15\sqrt{43}\end{bmatrix}$$

Da er $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2)$ en ortonormal basis.

b) Vektorene

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$$

er allerede ortogonale, så det eneste som gjenstår er å normalisere dem. Vi deler hver vektor på lengden sin og får:

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix}1/2\\\sqrt{2}/2\\1/2\end{bmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{u}}_3 = \begin{bmatrix}1/2\\-\sqrt{2}/2\\1/2\end{bmatrix}$$

Da er $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{u}}_3)$ en ortonormal basis.

c) Vi husker at vi så de samme vektorene i oppgave 12.4. Da fant vi ut at vektoren $(1, i, i)$ er ortogonal til hver av de to andre. Det betyr at vi kan starte med å sette:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\i\\i\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}i\\1\\0\end{bmatrix}$$

Da er $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ ortogonale til hverandre, og vi må bare gjøre $(i, 0, 1)$ ortogonal til begge disse. Vi setter:

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}i\\0\\1\end{bmatrix} - P_{\mathbf{u}_1}\begin{bmatrix}i\\0\\1\end{bmatrix} - P_{\mathbf{u}_2}\begin{bmatrix}i\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}i/2\\-1/2\\1\end{bmatrix}$$

Da er $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ en ortogonal basis. Vi normaliserer:

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\i/\sqrt{3}\\i/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix}i/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{u}}_3 = \begin{bmatrix}i/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\\sqrt{2}/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

Da er $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{u}}_3)$ en ortonormal basis.

12.8. Vi bruker den ortogonale basisen $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ som vi fant i oppgave 12.7 a), og projiserer vektoren $(i, 2+i, 1)$ ned på hver basisvektor. Da får vi følgende vektor:

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{u}_1}\begin{bmatrix}i\\2+i\\1\end{bmatrix} + P_{\mathbf{u}_2}\begin{bmatrix}i\\2+i\\1\end{bmatrix}
&= \begin{bmatrix}-3/5-i/5\\3/2+i/2\\-3/10-i/10\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}184/215+253i/215\\16/43+22i/43\\32/215+44i/215\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}11/43+42i/43\\161/86+87i/86\\-13/86+9/86\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

12.9.

a) La

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

være koeffisientmatrisen og høyresiden i likningssystemet vårt. Vi ganger hver av disse med den adjungerte av A på venstre side, og får:

$$A^*A = \begin{bmatrix}2 & -3 & -1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14 & -2\\-2 & 3\end{bmatrix}$$
$$A^*\mathbf{b} = \begin{bmatrix}2 & -3 & -1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$$

Vi må løse likningssystemet

$$A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}.$$

Dette systemet har følgende totalmatrise:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

Når vi gausseliminerer denne, får vi:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5/38 \\ 0 & 1 & -11/19 \end{array}\right]$$

Minste kvadraters metode gir altså løsningen

$$\begin{bmatrix} 5/38 \\ -11/19 \end{bmatrix}.$$

b) La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ i & i & -1 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$

være koeffisientmatrisen og høyresiden. Vi får:

$$\begin{aligned} A^*A &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & -i & -i & -i \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ i & i & -1 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 4 & -i \\ -i & i & 3 \end{bmatrix} \\ A^*\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & -i & -i & -i \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-i \\ 1-3i \\ 1-2i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Det betyr at systemet

$$A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$$

har følgende totalmatrise:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 1-i \\ 1 & 4 & -i & 1-3i \\ -i & i & 3 & 1-2i \end{array}\right]$$

Vi gausseliminerer og får:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/2-i/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1-2i/3 \\ 0 & 0 & 1 & -3i/2 \end{array}\right]$$

Minste kvadraters metode gir altså løsningen

$$\begin{bmatrix} -3/2-i/3 \\ 1-2i/3 \\ -3i/2 \end{bmatrix}.$$

12.10.

a) Vi vil finne et fjerdegradspolynom

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

som oppfyller:

$$\begin{array}{ll} p(0) = 1 & p(3) = 5 \\ p(1) = 2 & p(4) = 7 \\ p(2) = 3 & \end{array}$$

Det betyr at koeffisientene $a_4, a_3, \ldots, a_0$ må oppfylle følgende likninger:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 2 \\ 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 3 \\ 81a_4 + 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 5 \\ 256a_4 + 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 = 7 \end{cases}$$

b) Hvis det fantes et annengradspolynom

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

som gikk gjennom alle punktene, ville koeffisientene oppfylt følgende likningssystem:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_2 + a_1 + a_0 = 2 \\ 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 3 \\ 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 5 \\ 16a_2 + 4a_1 + a_0 = 7 \end{cases}$$

Vi bruker minste kvadraters metode på dette systemet. La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

være koeffisientmatrisen og høyresiden. Vi får:

$$\begin{aligned} A^*A &= \begin{bmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 5 \end{bmatrix} \\ A^*\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 171 \\ 51 \\ 18 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Løsningen av likningssystemet $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$ blir:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3/14 \\ 9/14 \\ 36/35 \end{bmatrix}$$

Annengradspolynomet som passer best til punktene er altså:

$$p(x) = \frac{3}{14}x^2 + \frac{9}{14}x + \frac{36}{35}$$

12.11.

a) Vi bruker minste kvadraters metode på likningssystemet

$$\begin{cases} \qquad\qquad\qquad d = 1 \\ a + \quad b + \quad c + d = 2 \\ 8a + \ 4b + 2c + d = 9 \\ 27a + \ 9b + 3c + d = 28 \\ 64a + 16b + 4c + d = 65 \end{cases}$$

og får løsningen

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Polynomet som passer best til punktene er altså:

$$p(x) = x^3 + 1$$

b) Polynomet p som vi fant i del a) passer faktisk eksakt til punktene.

12.12. Siden $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ er en ortonormal basis, har vi

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^\top \mathbf{u}_k &= 1 \quad \text{for hver } k \text{, og} \\ \mathbf{u}_k^\top \mathbf{u}_l &= 0 \quad \text{for } k \neq l. \end{aligned}$$

Det vil si at

$$\begin{aligned} A^\top A &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^\top \\ \mathbf{u}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_3 & \cdots & \mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_3 & \cdots & \mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_3^\top \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_3^\top \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3^\top \mathbf{u}_3 & \cdots & \mathbf{u}_3^\top \mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_n^\top \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_n^\top \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_n^\top \mathbf{u}_3 & \cdots & \mathbf{u}_n^\top \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ &= I_n \end{aligned}$$

Dette vil si at $A^\top$ er inversen til A.

(Hvorfor holdt det å regne ut $A^\top A$? Må vi ikke også sjekke at $AA^\top$ blir I_n? Husk at vi i slutten av kapittel 4 viste at dersom $AB = I_n$ for to $n \times n$-matriser A og B, så er også $BA = I_n$. Så når vi har sjekket at $A^\top A = I_n$, så følger det at $AA^\top$ også må være I_n.)

12.13. La $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_n$ være en samling med vektorer som er parvis ortogonale. Da har vi

$$\mathbf{v}_k^* \mathbf{v}_l = 0$$

for alle k og l slik at $k \neq l$.

Vi vil vise at vektorene er lineært uavhengige, så vi ser på likningen

$$\mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{v}_n x_n = 0.$$

Hvis vi ganger denne til venstre med $\mathbf{v}_1^*$, får vi:

$$\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_n x_n = 0,$$

som vi kan forenkle til

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 x_1 = 0.$$

Siden $\mathbf{v}_1$ ikke er nullvektoren, er lengden $\|\mathbf{v}_1\|$ ulik 0, så dette betyr at

$$x_1 = 0.$$

På samme måte kan vi gange likningen med $\mathbf{v}_2^*$, og $\mathbf{v}_3^*$, og så videre, og da får vi

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0.$$

Det vil si at eneste løsning av likningen

$$\mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{v}_n x_n = 0.$$

er den trivielle løsningen, og dermed er vektorene

$$\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2, \ \ldots, \ \mathbf{v}_n$$

lineært uavhengige.

12.14. La $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være to vilkårlige vektorer i $\mathbb{C}^n$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Da har vi:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^* \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \\ &= \overline{v_1} w_1 + \overline{v_2} w_2 + \cdots \overline{v_n} w_n \end{aligned}$$

På samme måte får vi:

$$\mathbf{w}^* \mathbf{v} = \overline{w_1} v_1 + \overline{w_2} v_2 + \cdots \overline{w_n} v_n,$$

Dermed:

$$\overline{\mathbf{w}^* \mathbf{v}} = w_1 \overline{v_1} + w_2 \overline{v_2} + \cdots w_n \overline{v_n} = \mathbf{v}^* \mathbf{w}$$

12.15. Vi tar først noen merknader om matrisen $P_{\mathbf{v}}$.

Vi har

$$P_{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} = \frac{1}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} \mathbf{v}\mathbf{v}^*$$

Siden $\mathbf{v}^*\mathbf{v}$ er et reelt tall, har vi:

$$P_{\mathbf{v}}^* = \frac{1}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} (\mathbf{v}\mathbf{v}^*)^* = \frac{1}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} (\mathbf{v}^*)^* \mathbf{v}^* = \frac{1}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} \mathbf{v}\mathbf{v}^* = P_{\mathbf{v}}$$

Matrisen $P_{\mathbf{v}}$ er altså sin egen adjungerte. Videre har vi:

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{v}}^2 &= \left(\frac{1}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} \right)^2 (\mathbf{v}\mathbf{v}^*)(\mathbf{v}\mathbf{v}^*) \\ &= \frac{1}{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})^2} \mathbf{v}(\mathbf{v}^*\mathbf{v})\mathbf{v}^* \\ &= \frac{1}{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})^2} (\mathbf{v}^*\mathbf{v})\mathbf{v}\mathbf{v}^* \\ &= \frac{1}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} \mathbf{v}\mathbf{v}^* \\ &= P_{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

Det å opphøye matrisen $P_{\mathbf{v}}$ i andre gir altså oss igjen bare den samme matrisen tilbake.

Nå går vi løs på å vise at vektorene $P_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$ og $\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$ er ortogonale. Ved å bruke at $P_{\mathbf{v}}^* = P_{\mathbf{v}}$ og at $P_{\mathbf{v}}^2 = P_{\mathbf{v}}$ får vi:

$$\begin{aligned}
(P_{\mathbf{v}}\mathbf{w})^*(\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}\mathbf{w}) &= \mathbf{w}^* P_{\mathbf{v}}^*(\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}\mathbf{w}) \\
&= \mathbf{w}^* P_{\mathbf{v}}^*\mathbf{w} - \mathbf{w}^* P_{\mathbf{v}}^* P_{\mathbf{v}}\mathbf{w} \\
&= \mathbf{w}^* P_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - \mathbf{w}^* P_{\mathbf{v}} P_{\mathbf{v}}\mathbf{w} \\
&= \mathbf{w}^* P_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - \mathbf{w}^* P_{\mathbf{v}}\mathbf{w} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Det vil si at $P_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$ og $\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$ er ortogonale.