13.1.

a) Matrisen har egenverdien 0, med tilhørende egenrom $\mathrm{Sp}\{[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}]\}$. Siden den ikke har to lineært uavhengige egenvektorer er den ikke diagonaliserbar.

b) Matrisen har egenverdiene 2 og 5, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\} \quad \text{og} \quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}25\\15\\9\end{bmatrix}\right\}.$$

Siden den ikke har tre lineært uavhengige egenvektorer er den ikke diagonaliserbar.

c) Det karakteristiske polynomet er

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 2\\ 3 & -1-\lambda & 6\\ -2 & 2 & -2-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda - 16.$$

Vi må altså løse likningen

$$-\lambda^3 + 12\lambda - 16 = 0.$$

Ved å prøve oss frem finner vi ganske raskt at $\lambda = 2$ er en løsning. Det vil si at vi kan dele ut faktoren $(\lambda - 2)$ fra det karakteristiske polynomet ved polynomdivisjon. Da får vi at

$$-\lambda^3 + 12\lambda - 16 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 - 2\lambda + 8).$$

Vi finner dermed de andre løsningene av likningen ved å løse

$$-\lambda^2 - 2\lambda + 8 = 0,$$

som vi gjør ved å bruke den vanlige formelen for andregradslikninger:

$$\lambda = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 8}}{2(-1)} = -1 \pm 3$$

Egenverdiene til matrisen er altså 2 og -4.

Vi finner egenrommene på vanlig måte. Egenrommet til egenverdien 2 er

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\right\},$$

og egenrommet til egenverdien -4 er

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}\right\}.$$

Matrisen har altså tre lineært uavhengige egenvektorer, så den er diagonaliserbar.

d) Egenverdiene er 3, $-i$ og i, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}-i\\1\\0\end{bmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}i\\1\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Matrisen har altså tre lineært uavhengige egenvektorer, så den er diagonaliserbar.

e) Egenverdiene er 0, 3, $-i$ og i, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}-6\\5\\0\\1\end{bmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}39\\113\\30\\40\end{bmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}-i\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}i\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Matrisen har altså fire lineært uavhengige egenvektorer, så den er diagonaliserbar.

f) Egenverdiene er -4, 7, $-i$ og i, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}20\\12\\17\\-17\end{bmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}151\\293\\350\\200\end{bmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}-i\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}i\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Matrisen har altså fire lineært uavhengige egenvektorer, så den er diagonaliserbar.

13.2. Vi starter med å finne en diagonalisering $A = VDV^{-1}$ av A. Siden A er øvre triangulær, er egenverdiene til A bare tallene på diagonalen: 2, 3 og 5. Vi lager matrisen V ved å sette sammen egenvektorer som hører til de tre egenverdiene, og vi lager matrisen D ved å sette egenverdiene på diagonalen:

$$V = \begin{bmatrix}1 & 3 & 25\\ 0 & 1 & 15\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

Da får vi (ved å regne ut inversen på vanlig måte) at

$$V^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -3 & 10/3\\ 0 & 1 & -5/2\\ 0 & 0 & 1/6\end{bmatrix}$$

Dermed har vi diagonalisert matrisen A.

Legg merke til at når $A = VDV^{-1}$, så har vi

$$\begin{aligned}A^2 &= (VDV^{-1})(VDV^{-1}) = VD(V^{-1}V)DV^{-1}\\ &= VD^2V^{-1},\\ A^3 &= (VD^2V^{-1})(VDV^{-1}) = VD^2(V^{-1}V)DV^{-1}\\ &= VD^3V^{-1},\end{aligned}$$

og så videre. Generelt:

$$A^n = VD^nV^{-1}$$

Det betyr at i vårt tilfelle kan vi beregne A^{10} slik:

$$\begin{aligned}A^{10} &= VD^{10}V^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 3 & 25\\ 0 & 1 & 15\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^{10} & 0 & 0\\ 0 & 3^{10} & 0\\ 0 & 0 & 5^{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3 & 10/3\\ 0 & 1 & -5/2\\ 0 & 0 & 1/6\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1024 & 174075 & 40250650\\ 0 & 59049 & 24266440\\ 0 & 0 & 9765625\end{bmatrix}\end{aligned}$$

13.3.

a) Det karakteristiske polynomet er

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3-i \\ 3+i & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda)-(3-i)(3+i)$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda - 2,$$

og egenverdiene er $3+\sqrt{11}$ og $3-\sqrt{11}$.

Vi finner lett ut at

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3-i \\ 1+\sqrt{11} \end{bmatrix}$$

er en egenvektor for egenverdien $3+\sqrt{11}$, og at

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3-i \\ 1-\sqrt{11} \end{bmatrix}$$

er en egenvektor for egenverdien $3-\sqrt{11}$. For å lage en ortogonal diagonalisering må vi ha egenvektorer med lengde 1, så vi deler hver av disse på lengden sin og får normaliserte egenvektorer $\hat{\mathbf{v}}_1$ og $\hat{\mathbf{v}}_2$:

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2(11+\sqrt{11})}}\mathbf{v}_1$$
$$= \begin{bmatrix} (3-i)\Big/\sqrt{2(11+\sqrt{11})} \\ (1+\sqrt{11})\Big/\sqrt{2(11+\sqrt{11})} \end{bmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2(11-\sqrt{11})}}\mathbf{v}_2$$
$$= \begin{bmatrix} (3-i)\Big/\sqrt{2(11-\sqrt{11})} \\ (1-\sqrt{11})\Big/\sqrt{2(11-\sqrt{11})} \end{bmatrix}$$

Da kan vi sette

$$V = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1 & \hat{\mathbf{v}}_2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 3+\sqrt{11} & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{11} \end{bmatrix}$$

b) Det karakteristiske polynomet er

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-i \\ 1+i & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3.$$

Egenverdiene er $\sqrt{3}$ og $-\sqrt{3}$. Vi finner tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1+i \\ 1-\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1+i \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Vi normaliserer disse:

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} (-1+i)/\sqrt{(6-2\sqrt{3})} \\ (1-\sqrt{3})/\sqrt{(6-2\sqrt{3})} \end{bmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} (-1+i)/\sqrt{(6+2\sqrt{3})} \\ (1+\sqrt{3})/\sqrt{(6+2\sqrt{3})} \end{bmatrix}$$

Da kan vi sette

$$V = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1 & \hat{\mathbf{v}}_2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

c) Det karakteristiske polynomet er

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 36\lambda$$

Egenverdiene er 0, 4 og 9. Vi finner tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi normaliserer disse:

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{3} \\ 1/(2\sqrt{3}) \\ 1/(2\sqrt{3}) \end{bmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{v}}_3 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

Da kan vi sette

$$V = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1 & \hat{\mathbf{v}}_2 & \hat{\mathbf{v}}_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

13.4. Det karakteristiske polynomet til A er:

$$\begin{vmatrix} r_1-\lambda & z \\ \overline{z} & r_2-\lambda \end{vmatrix} = (r_1-\lambda)(r_2-\lambda) - z\overline{z}$$
$$= \lambda^2 - (r_1+r_2)\lambda + r_1r_2 - z\overline{z}$$

Egenverdiene blir:

$$\lambda = \frac{r_1+r_2 \pm \sqrt{(r_1+r_2)^2 - 4(r_1r_2 - z\overline{z})}}{2}$$
$$= \frac{r_1+r_2 \pm \sqrt{(r_1-r_2)^2 + 4z\overline{z}}}{2}$$

13.5. Det karakteristiske polynomet er

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ b & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-b-\lambda \end{vmatrix} = (a-b-\lambda)\big((a-\lambda)^2 - b^2\big).$$

For å finne egenverdiene må vi altså løse likningen

$$(a-b-\lambda)\big((a-\lambda)^2 - b^2\big) = 0,$$

som er det samme som

$$a-b-\lambda = 0 \qquad \text{eller} \qquad (a-\lambda)^2 - b^2 = 0.$$

Vi får løsningene $\lambda = a \pm b$, så matrisen A har de to egenverdiene $a-b$ og $a+b$.

Vi gausseliminerer matrisen $A-(a-b)I_3$ for å finne egenvektorer som hører til den første egenverdien:

$$\begin{bmatrix} a-(a-b) & b & 0 \\ b & a-(a-b) & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)-(a-b) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} b & b & 0 \\ b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenrommet til egenverdien $a-b$ er altså

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

Vi gausseliminerer matrisen $A-(a+b)I_3$ for å finne egenvektorer som hører til den andre egenverdien:

$$\begin{bmatrix}a-(a+b) & b & 0\\ b & a-(a+b) & 0\\ 0 & 0 & (a-b)-(a+b)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-b & b & 0\\ b & -b & 0\\ 0 & 0 & -2b\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Egenrommet til egenverdien $a+b$ er altså

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Matrisen A er diagonaliserbar siden den har tre lineært uavhengige egenvektorer.

13.6. Anta at A er en symmetrisk matrise, altså at $A=A^*$. Da har vi

$$A^*A=AA=AA^*,$$

så A er normal.

13.7. La $A=\begin{bmatrix}5 & -1-2i\\ -1-2i & 5\end{bmatrix}$.

a) Den adjungerte av A er:

$$A^*=\begin{bmatrix}5 & -1+2i\\ -1+2i & 5\end{bmatrix}$$

Siden $A^*\neq A$ er A ikke symmetrisk.

b) Vi kan sjekke direkte om A er ortogonalt diagonaliserbar, men det kan være enklere å svare på del **c)** først.

c) Vi regner ut A^*A og AA^*:

$$\begin{aligned}A^*A&=\begin{bmatrix}5 & -1+2i\\ -1+2i & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1-2i\\ -1-2i & 5\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}30 & -10\\ -10 & 30\end{bmatrix}\\ AA^*&=\begin{bmatrix}5 & -1-2i\\ -1-2i & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1+2i\\ -1+2i & 5\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}30 & -10\\ -10 & 30\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Vi har altså at $A^*A=AA^*$, så A er en normal matrise.

b) Vi har funnet ut at A er normal, og dermed må den være ortogonalt diagonaliserbar.

13.8.

a) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

b) Ikke diagonaliserbar: Vi ser at $\lambda=0$ er eneste egenverdien (triangulær matrise). Men det er kun konstante polynom som er egenvektorer til 0 (den deriverte av en konstant er lik null). Med andre ord, egenrommet til null er endimensjonalt.

13.9.

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

b) Egenverdiene er 1, 2 og 3, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\},\qquad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\},\qquad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

Matrisen A er diagonaliserbar siden den har tre lineært uavhengige egenvektorer.

13.10.

a) Rotasjonsvinkelen er $\pi/6$.

b) Det karakteristiske polynomet er:

$$\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda\end{vmatrix}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda\right)^2+\frac{1}{4}$$

Egenverdiene er

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\qquad\text{og}\qquad\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2},$$

med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}\right\}\qquad\text{og}\qquad\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}i\\-1\end{bmatrix}\right\}.$$

c) La

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}\qquad\text{og}\qquad\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}i\\-1\end{bmatrix}$$

være de to egenvektorene i fant i del **b)**. Vi skal finne matrisen til T med hensyn på basisen $\mathscr{B}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$. Vi vet at

$$T(\mathbf{v}_1)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\mathbf{v}_1\quad\text{og}\quad T(\mathbf{v}_2)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)\mathbf{v}_2.$$

Dermed får vi følgende matrise:

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\end{bmatrix}$$