Løsningsforslag øving 12

14.1. Vi ber kun om en skisse. Det holder å finne egenverdiene for å se hvordan systemet oppfører seg.

a) Egenverdiene er -1 og 1, derfor får vi en sadel om origo.

b) Egenverdiene er 4 og 6, derfor får vi en ustabilt likevektsløsning.

c) Egenverdiene er $2+i$ og $2-i$, derfor får vi spiraler som er sirkulære og utgående fra origo.

d) Egenverdiene er $3i$ og $-3i$, derfor får vi sirkulære baner om origo.

14.2. Du fant egenverdier og egenvektorer til alle matrisene i kapittel 13. Du trenger derfor bare å sette inn i formelen for generell løsning.

a)

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix}25\\15\\6\end{bmatrix} e^{5t}$$

b)

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix} e^{-4t}$$

c)

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} e^{3t} + c_2(\cos(t) \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - \sin(t) \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}) + c_3(\cos(t) \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \sin(t) \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix})$$

d)

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix}20\\12\\17\\-17\end{bmatrix} e^{-4t} + c_2 \begin{bmatrix}151\\293\\350\\200\end{bmatrix} e^{7t} + c_3(\cos(t) \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} - \sin(t) \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}) + c_4(\cos(t) \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \sin(t) \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix})$$

14.3.

a)

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} e^{2t}$$

b)

$$\mathbf{y} = 2 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} e^{2t} - \begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix} e^{-4t}$$

c)

$$\mathbf{y} = 3 \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} e^{3t} + 2(\cos(t) \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - \sin(t) \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}) + (\cos(t) \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \sin(t) \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix})$$

14.4.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} e^{3(t-\frac{\pi}{2})} - (\cos(t) \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - \sin(t) \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}) + (\cos(t) \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \sin(t) \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix})$$

14.5. Vi har sett at den generelle løsningen er

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix} e^{-4t}.$$

Det gjenstår kun å bestemme koeffisientene fra initialverdiene:

$$c_1 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix} = \mathbf{y}_0.$$

Dette kan skrives som en matriselikning

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\1 & 0 & 3\\0 & 1 & -1\end{bmatrix} \mathbf{c} = \mathbf{y}_0$$

hvor $\mathbf{c} = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$. Du kan sjekke at kolonnene til denne matrisen er inverterbar. Dermed er det et entydig valg av koeffisienter c_1, c_2 og c_3; løsningen er dermed entydig ettersom den generelle løsningen inneholder alle løsninger.

14.6.

a) Dette er superposisjonsprinsippet.

b) Vi viste i forrige oppgave at en løsning er entydig bestemt av en gitt initialverdi. Initialverdiene danner et tredimensjonalt rom. Derfor er dimensjonen lik tre.

15.1. La $v = y'$.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'$

15.2.

a) $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$

b) $y = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$

c) $y = (c_1 + tc_2)e^{2t}$

15.3.

a) $y = \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})$

b) $y = \sin(t)$

c) $y = (t-1)e^{2(t-1)}$

15.4.

a) Prøv $y = ae^{-2t}$ for å finne

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t}.$$

b) Prøv $y = ate^{2t}$ for å finne

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{3} te^{2t}.$$

c) Prøv at for å finne

$$y = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + t.$$

d) Prøv $at + b$ for å finne

$$y = (c_1 + tc_2)e^{2t} + t + 1.$$

15.5. Vi ser at polynomene blir like.

Bevis: Betrakt en generell likning $y'' + py' + qy = 0$. Det karakteristiske polynomet er $\lambda^2 + p\lambda + q$. Vi kan generelt skrive tilhørende system som

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'$$

hvor $v = y'$. Det karakteristiske polynomet til matrisen blir

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -q & -p-\lambda \end{bmatrix} = \lambda(p+\lambda) + q = \lambda^2 + p\lambda + q.$$

Polynomene er like.