Øving 3 (frist 14. september)

Oppgaver til kapittel 4

1. La A og B være matriser, og $\mathbf{v}$ en vektor:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Regn ut (eller forklar hvorfor uttrykkene ikke gir mening):

a) AB **d)** B^2 **g)** $BA\mathbf{v}$

b) BA **e)** $A + B$ **h)** $B^\top$

c) A^2 **f)** $(A + I_3)\mathbf{v}$ **i)** $\mathbf{v}^\top\mathbf{v}$

2. La $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være vektorer i $\mathbb{R}^2$, og A en 2×2-matrise slik at:

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Regn ut $A\mathbf{w}$, der $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

3. Løs de to likningene $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ og $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$, der A, $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ er gitt ved:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. Er følgende matriser inverterbare? I så fall, finn den inverse og sjekk at svaret ditt er riktig.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. Finn en kvadratisk matrise A slik at:

a) $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ og $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ og $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99 \\ -1 \\ 145 \end{bmatrix}$ og $A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

d) $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ og $A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

6. La A og B være to 2×2-matriser. Betrakt likningen

$$AX = B,$$

hvor X er en ukjent 2×2-matrise.

a) Forklar hvorfor likningen er ekvivalent med å løse to 2×2-likningssystemer samtidig. Hvordan generaliseres denne påstanden for $n \times n$-matriser?

b) Løs likningen for $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

7. La A, B og C være 2×2-matriser. Betrakt likningen

$$AX + XB = C,$$

hvor X er en ukjent 2×2-matrise.

a) Hvorfor kan man *ikke* løse denne likningen som to 2×2-likningssystemer samtidig?

b) Skriv om likningen til fire likninger med fire ukjente. Hva er totalmatrisen?

c) Løs likningen når A, B og C er følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8. La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kan du finne et tall c og en vektor $\mathbf{v}$ (som ikke skal være nullvektoren) slik at $A\mathbf{v} = c\mathbf{v}$? I så fall, for hvilke valg av c eksisterer en slik ikke-null vektor? Kan du gi en geometrisk forklaring på hva som skjer når du multipliserer A med vektorene i de ulike tilfellene for c?

9. La A, $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ være gitt ved:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Skisser $A\mathbf{e}_1$ og $A\mathbf{e}_2$ i planet. Hva har skjedd med $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ geometrisk når de er blitt ganget med A?

b) Hva skjer – geometrisk – med en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^2$ når vi multipliserer med A?

c) Kan du gi en geometrisk forklaring på hvorfor A burde være inverterbar? Har du et forslag til hvordan multiplikasjon med A^{-1} burde endre en vilkårlig vektor (geometrisk)?

d) Finn den inverse matrisen til A, og sammenlign med svaret ditt i del **c)**.

10.

a) La

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

være to vektorer i $\mathbb{R}^n$. Vis at prikkproduktet mellom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n,$$

er det samme som matriseproduktet $\mathbf{v}^\top\mathbf{w}$.

b) La $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ være en $n \times n$-matrise slik at $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i = 1$ for alle i, og $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0$ for $i \neq j$. Vis at $A^{-1} = A^\top$.

Hint: Hva er radene i matrisen $A^\top$?

c) Sjekk at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

oppfyller antagelsene i del **b)**, og bruk dette til å bestemme A^{-1}. Sjekk at svaret ditt er riktig.