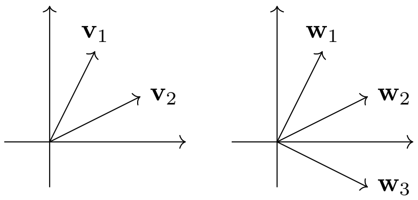
Øving 4 (frist 21. september)

Oppgaver til kapittel 5

1. De to bildene viser vektorer i $\mathbb{R}^2$.



I hvert tilfelle: Er vektorene på tegningen lineært uavhengige? Utspenner de $\mathbb{R}^2$? Begrunn svarene dine.

2.

a) Sjekk at vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige.

b) Finn en tredje vektor $\mathbf{v}$ som sammen med vektorene i **a)** er lineært uavhengige.

c) Vis at $\mathbf{v}$ og vektorene i **a)** til sammen spenner ut $\mathbb{R}^3$. Sammenlign med oppgave **9. b)** i kapittel 3.

3.

a) Sjekk om vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige.

b) Finn en vektor $\mathbf{v}$ som er lineært uavhengig av hver av vektorene i **a)**.

c) Bruk teorien om lineært uavhengige vektorer til å vise at vektorene i **a)** og vektoren $\mathbf{v}$ til sammen spenner ut $\mathbb{R}^3$.

4. Finn ut om følgende påstander er sanne eller ikke.

a) Hvis tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært avhengige, så finnes det to tall a og b slik at:

$$\mathbf{u} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w}$$

b) Hvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært uavhengige, og $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige, så er $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ lineært uavhengige.

c) Hvis $m > n$, så kan vi ikke ha m lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^n$.

5. La A være en $m \times n$-matrise, og la $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Finn ut om følgende påstander er sanne eller ikke (gi et bevis eller et moteksempel).

a) Hvis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$ er lineært uavhengige, så er $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_t$ også lineært uavhengige.

b) Hvis $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_t$ er lineært uavhengige, så er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$ også lineært uavhengige.

Oppgaver til kapittel 6

1. Regn ut determinanten til følgende matriser og avgjør – basert på dette – om kolonnene er lineært uavhengige:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 2 & 1 \\ -6 & 15 & -9 & -12 & 1 \\ 4 & -8 & 14 & 5 & -6 \\ -2 & 5 & 4 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

2. Skisser parallellogrammet utspent av følgende vektorer i $\mathbb{R}^2$, og regn ut arealet.

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. Regn ut volumet av tetraederet i $\mathbb{R}^3$ med

$$(8, 8, 4), \quad (16, 0, 0), \quad (1, 1, 9) \quad \text{og} \quad (8, 11, -4)$$

som hjørner.

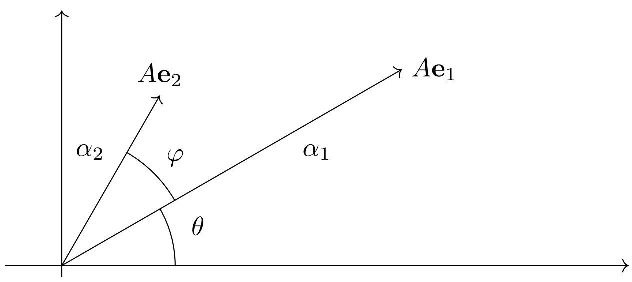
4. La $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ være enhetsvektorene i $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En 2×2-matrise A kan beskrives ved hjelp av fire tall α_1, α_2, θ og φ, der:

α_1 er lengden av vektoren $A\mathbf{e}_1$
α_2 er lengden av vektoren $A\mathbf{e}_2$
θ er vinkelen (mot klokken) opp til vektoren $A\mathbf{e}_1$
φ er vinkelen (mot klokken) fra $A\mathbf{e}_1$ til $A\mathbf{e}_2$

Disse er illustrert på figuren under.



a) Hvordan kan du, basert på tallene α_1, α_2, θ og φ, se om determinanten til A er positiv, negativ eller 0?

b) Forklar hvordan determinanten til A endrer seg hvis vi endrer én av de fire verdiene α_1, α_2, θ og φ, mens vi lar de tre andre forbli som de er.

c) Finn det A uttrykt ved α_1, α_2, θ og φ.

5. La A være matrisen

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & z \end{bmatrix}.$$

a) Finn $\det A$ uttrykt ved a, b, c og x, y, z.

b) For hvilke a, b, c og x, y, z er A inverterbar?

6. Avgjør om følgende påstander er sanne eller ikke. Gi et bevis eller moteksempel i hvert tilfelle.

a) La A og B være $n \times n$-matriser. Hvis AB er inverterbar, så er både A og B inverterbare.

b) Anta at A er en inverterbar matrise. Da har vi at

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

c) Hvis A og B er $n \times n$-matriser, så er

$$\det(A + B) = \det A + \det B.$$

d) Hvis A og B er $n \times n$-matriser, så er

$$\det(AB) = \det(BA).$$

7. La A være en $n \times n$-matrise, og la $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Anta at $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, men at $A\mathbf{u} = A\mathbf{v}$. Hva kan du da si om determinanten til A?

8. La A være en $m \times n$-matrise slik at

$$\det(A^\top \cdot A) \neq 0.$$

Hva kan du da si om m og n?

9. La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Finn $\det(A \cdot A^\top)$ og $\det(A^\top \cdot A)$.