Øving 5 (frist 28. september)

Oppgaver til kapittel 7

1. Finn egenverdier og tilhørende egenvektorer til følgende matriser.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

Hint for del **d)**: Polynomdivisjon. Hvis ikke $\lambda = 1$ fungerer, prøv $\lambda = 2$. Hvis ikke $\lambda = 2$ fungerer, prøv $\lambda = 3, \ldots$

2.

a) Regn ut egenverdiene til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

og finn tilhørende egenrom.

b) Skissér egenrommene.
Hint: Du har løst denne oppgaven tidligere.

3.

a) Regn ut egenvektorene til

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

og finn tilhørende egenrom.

b) Skissér egenrommene.

4.

a) Vis at matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ikke har noen egenverdier.

b) Gi en geometrisk forklaring på del **a)**.

5.

a) Finn vektorene som svarer til at

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er blitt rotert med θ radianer.

b) Utled formelen for 2×2-matrisen T_θ som roterer vektorer θ radianer mot klokken ved multiplikasjon.
Hint: Hva skjer når du ganger T_θ med $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$?

c) For hvilke verdier av θ har T_θ en egenverdi? Gi en geometrisk forklaring.

6. Avgjør om følgende påstander er sanne eller ikke. Begrunn svaret ditt.

a) En $n \times n$-matrise har alltid n egenverdier.

b) Dersom A har en ikke-null egenverdi c, så kan ikke A være lik null-matrisen.

c) To egenvektorer til en matrise A som svarer til samme egenverdi kan være lineært uavhengige.

7. La A være en $n \times n$-matrise. Vis at A og dens transponerte $A^\top$ har like egenverdier.
Hint: Husk at determinanten til en matrise B og dens transponerte $B^\top$ er like.

8.

a) Regn ut egenverdiene til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 77 \end{bmatrix}.$$

b) Finn egenrommene til de ulike egenverdiene.

c) A er en 4×4-matrise. Er det alltid enkelt å finne egenverdiene til en 4×4-matrise? Mer generelt, er det alltid enkelt å finne egenverdiene til $n \times n$-matriser?

9. La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 28 & 30 & -20 & -2 \\ 6 & 40 & -10 & -4 \\ 4 & 10 & 20 & -6 \\ 2 & 20 & -30 & 32 \end{bmatrix}$$

a) Hvilke av vektorene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer for A?

b) Finn alle egenverdiene til A, og de tilhørende egenrommene.

10. La A være en $n \times n$-matrise slik at $A^2 = A$. Hva kan du da si om egenverdiene til A?
Hint: Prøv å finne noen forskjellige matriser A som er slik at $A^2 = A$. Kan du finne en slik matrise som ikke har noen egenverdier? En som har én egenverdi? To egenverdier? Flere enn to?

11. La A være en $n \times n$-matrise som har n forskjellige egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Lag en $n \times n$-matrise

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix},$$

der $\mathbf{v}_1$ er en egenvektor som hører til egenverdien λ_1, og $\mathbf{v}_2$ er en egenvektor som hører til egenverdien λ_2, og så videre.

a) Kan du finne ut om matrisen V er inverterbar eller ikke?

b) Dersom V er inverterbar, hvordan ser matrisen $V^{-1}AV$ ut?

c) Finn en 3×3-matrise som har egenverdier 1, 2 og 3, med tilhørende egenvektorer

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$