Øving 6 (frist 5. oktober)

Oppgaver til kapittel 8

1. La A og B være følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Finn en basis for kolonnerommet, nullrommet og radrommet til A, og finn dimensjonen til hvert av disse rommene.

b) Gjør det samme for matrisen B.

c) Ligger vektoren $(0, 1, -2, 3, -1, -1, 1)$ i nullrommet til A?

d) Ligger vektoren $(-1, -1, -1, -1)$ i kolonnerommet til A? Ligger den i kolonnerommet til B?

2.

a) Finn en basis for $\mathcal{P}_2$. Vis at det faktisk er en basis.

b) Hva er koordinatene til $1 + 2x + 3x^2$ i basisen du fant for $\mathcal{P}_2$?

c) Finn en basis for $\mathcal{P}_n$, der $n \geq 0$.

3. La $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Se på planet i $\mathbb{R}^3$ som består av alle vektorer på formen

$$\mathbf{u} + s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2$$

der s og t er vilkårlige tall. Er dette planet et underrom av $\mathbb{R}^3$?

b) Er planet som består av alle vektorer på formen

$$\mathbf{v} + s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2$$

et underrom av $\mathbb{R}^3$?

c) La $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$ være matrisen som har $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ som kolonner. Ligger vektoren $\mathbf{u}$ i kolonnerommet til denne matrisen? Hva med $\mathbf{v}$? Sammenlign med det du fant ut i del **a)** og **b)**.

4. La A være en $m \times n$-matrise hvor $m < n$. Hvilke av følgende påstander kan vi da konkludere med?

a) $\dim \operatorname{Col} A > 0$

b) $\dim \operatorname{Null} A > 0$

5. La V være et vektorrom, og la U_1 og U_2 være to underrom av V. Hvilke av følgende påstander kan vi da konkludere med?

a) Snittet $U_1 \cap U_2$ er et underrom av V.

b) Unionen $U_1 \cup U_2$ er et underrom av V.

6.

a) Finn en basis for vektorrommet $\mathcal{M}_{m \times n}$. Hva er dimensjonen?

b) Se på følgende delmengder av $\mathcal{M}_n$:

U: alle diagonalmatriser
V: alle inverterbare matriser
W: alle matriser A slik at $A = A^\top$

Hvilke av disse mengdene er underrom av $\mathcal{M}_n$?

c) For de mengdene i del **b)** som er underrom, hva er dimensjonen?

7.

a) Forklar hvilke av vektorrommene

$\mathcal{P}_n$ (for forskjellige n)
$\mathcal{P}$
$\mathcal{C}(\mathbb{R})$
$\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ (for forskjellige n)
$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

som er underrom av hverandre.

b) Hvilke av vektorrommene i **a)** er endeligdimensjonale? Hvilke er uendeligdimensjonale?

8. La

$$V = \left\{ \boxed{r} \;\middle|\; r \in \mathbb{R} \text{ og } r > 0 \right\}$$

være mengden der hvert element er en boks som inneholder et positivt reelt tall, slik at for eksempel

$$\boxed{5}, \quad \boxed{\tfrac{3}{4}}, \quad \boxed{\pi} \quad \text{og} \quad \boxed{9328}$$

er elementer i V. Definer vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon for V slik:

$$\boxed{r} + \boxed{s} = \boxed{rs}$$
$$c \cdot \boxed{r} = \boxed{r^c}$$

Er V et vektorrom?

9. Vi skriver

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

for mengden av heltall.

a) Hvis vi tenker på elementene i vektorrommet $\mathbb{R}^1$ som bare tall, kan vi se på $\mathbb{Z}$ som en delmengde av $\mathbb{R}^1$. Er $\mathbb{Z}$ et underrom av $\mathbb{R}^1$?

b) Nå prøver vi å gjøre $\mathbb{Z}$ til et vektorrom ved å definere vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon direkte. Definer vektoraddisjon som vanlig addisjon av tall, og definer skalarmultiplikasjon av et reelt tall r og et heltall n ved

$$r * n = \lfloor rn \rfloor,$$

der uttrykket $\lfloor rn \rfloor$ betyr tallet rn rundet ned til et heltall. (Vi bruker symbolet $*$ for skalarmultiplikasjonen her for å ikke blande den sammen med vanlig multiplikasjon av tall.)

Er $\mathbb{Z}$ – med disse operasjonene – et vektorrom?

10. Hvis V er et vektorrom som er en endelig mengde, hva kan du da si om antall elementer i V?
Hint: Kan V ha null elementer? Ett element? To elementer? Flere enn to?

11. La λ være en egenverdi til en $n \times n$-matrise A. Vis at egenrommet til λ er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

12. La mengden D være det åpne intervallet mellom $-\pi/2$ og $\pi/2$:

$$D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Se på funksjonene sin, cos og tan som vektorer i $\mathcal{C}(D)$.

a) Er de lineært uavhengige?

b) Kan du få et annet svar ved å isteden se på dem som vektorer i $\mathcal{C}(E)$, der E er en delmengde av D?

13. La V være et vektorrom. Vis at følgende påstander følger fra vektorromsaksiomene.

a) Det additive identitetselementet er entydig. Det finnes altså nøyaktig én vektor $\mathbf{0}$ i V som er slik at $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$.

b) Hvis $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ for tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ i V, så følger det at $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

c) Additive inverser er entydige. For hver vektor $\mathbf{u}$ i V finnes det altså kun én vektor $-\mathbf{u}$ i V som er slik at $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

14. Utfordring
Vi har kun definert hva en basis er for endeligdimensjonale vektorrom. For å definere en basis til et uendeligdimensjonalt vektorrom, må vi først forstå hva i) spenne ut og ii) lineær uavhengighet skal bety for uendelige mengder.

Hvis S er en uendelig mengde av vektorer i et vektorrom V, så definerer vi følgende:
i) Vi sier at S *spenner ut* V dersom enhver vektor $\mathbf{v}$ i V kan skrives som en lineærkombinasjon av et endelig antall vektorer i S.
ii) Vi sier at S er *lineært uavhengig* dersom enhver likning

$$x_1\mathbf{s}_1 + \ldots x_n\mathbf{s}_n = \mathbf{0}$$

(hvor $\mathbf{s}_i$-ene er vektorer i S) kun har den trivielle løsningen $x_i = 0$ for alle i.

Nå kan vi definere en basis for vilkårlige vektorrom: En delmengde $\mathscr{B}$ av et vektorrom V er en *basis* for V dersom den spenner ut V og er lineært uavhengig.

(Her definerer vi en basis som en mengde og ikke en liste, siden det blir vanskelig å ha en rekkefølge på basisvektorene når det kan være uendelig mange av dem.)

a) Foreslå en basis for det uendeligdimensjonale vektorrommet $\mathcal{P}$.

b) Vis at forslaget ditt er en basis.