Øving 8 (frist 19. oktober)

Oppgaver til kapittel 10

1. Finn real- og imaginærdelen til

a) z^4

b) $\frac{1}{z}$

c) $\frac{z-1}{z+1}$

d) $\frac{1}{z^2}$

2. Beregn og merk av i det komplekse planet

a) $(1+2i)^3$

b) $\frac{5}{-3+4i}$

c) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$

3. Løs ligningene

a) $z^2 - z + 5 = 0$

b) $z^3 = 2i$

c) $z^4 = 2$

d) $z^5 = 2 + 2i$

4. Vis at

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

for alle komplekse tall z og w.

5. En variant av Eulers formel kalles de Moivres formel

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

a) Utled de Moivres formel.

b) Vis at $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$.

6. La z og w være følgende komplekse tall:

$$z = \frac{3\pi}{4}i \qquad w = -\frac{3\pi}{4}i$$

a) Skriv tallet $e^z - e^w$ på polar form.

b) Skriv tallet e^z/e^w på polar form.

c) Er det enkelt å dele komplekse tall på polar form? Hva med addere? Sammenlign med kartesisk form, altså $a + bi$.

7. Røtter er sunt.

a) Skriv det komplekse tallet $-1 + i\sqrt{3}$ på polar form.

b) Vis at $-1 + i\sqrt{3}$ er en sjetterot av 64.

c) Finn alle sjetterøttene til 64. Skissér dem i det komplekse planet.

8. Jeg sa du skulle pugge binomialteoremet!

a) Finn alle løsninger av likningen

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0.$$

Skissér løsningene i det komplekse planet.

b) Finn alle løsninger av likningen

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 2 = 0$$

ved å bruke svaret du fant i **a)**. Skissér løsningene i det komplekse planet.

9. Noen artige polygoner.

a) Finn alle tredjerøttene til 1. Tegn en rett linje fra løsning til løsning, etter økende vinkel. Hva slags geometrisk figur er dette?

b) Repeter del **a)** for alle fjerderøttene til 1.

c) Repeter del **a)** for alle n-terøttene ($n \geq 3$) til 1.

d) Får vi samme geometriske figur i **c)** dersom vi bytter ut 1 med et reelt tall $r \neq 0$? Hva med et generelt komplekst tall $w \neq 0$?

10. Vis at dersom koeffisentene a_i i polynomligningen

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$$

er reelle, kommer løsningene i konjugatpar, altså at dersom w er en løsning, er også $\overline{w}$ en løsning.

11. La z og w være to komplekse tall, begge ulik null. Er det mulig at $zw = 0$?

12. La $n > 0$ være et partall, og la z være en n-terot av et reelt tall. Er $\bar{z}$ også en n-terot av dette tallet?

13. Vis at $\mathbb{C}$ er et vektorrom.

14. Vis at vektorrommet som består av alle matriser på formen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

er isomorft med $\mathbb{C}$.