Øving 9 (frist 26. oktober)

Oppgaver til kapittel 11

1. Løs likningssystemet

$$(1+i)z - w = i$$
$$(1-i)z + (1+i)w = 1.$$

2. Er kolonnene lineært avhengige? Hvis ja, finn nullrommet til matrisen.

a)

$$\begin{bmatrix} 2i & 3i & 4i \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2i & 3 & 4 \\ 3 & 4i & 5 \\ 4 & 5 & 6i \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 2i & 3 & 4 \\ 3i & 4 & 5 \\ 4i & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Finn hver matrises determinant, egenverdier og tilhørende egenrom.

a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Beregn produktet av egenverdiene for hver matrise i forrige oppgave.

5. Finn en vektor $\mathbf{w}$ slik at

$$\mathbf{w}, \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 2i \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1+i \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

spenner ut $\mathbb{C}^3$.

6. Finn a slik at vektoren

$$\begin{bmatrix} a \\ 6-6i \\ -12 \end{bmatrix}$$

ligger i planet utspent av

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 2i \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

7. Vis at dersom matrisen A har egenverdi λ, har A^2 egenverdi λ^2.

8. Finn egenverdiene til rotasjonsmatrisen

$$T_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Hva er egenverdiene til $T_{2\theta}$?

9. Beregn determinanten. Følg nøye med, det kan være det ikke er så mye jobb som det ser ut.

a)

$$\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} i & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} i & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

e)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Sett sammen egenvektorene til

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i en 3×3-matrise P der egenvektorene er kolonner, og beregn $P^{-1}AP$.

11. Finn egenverdiene til matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

12. Vis at dersom en matrise har egenverdien 0, er den singulær.