Øving 10 (frist 2. november)

Oppgaver til kapittel 12

1. Finn den adjungerte matrisen til

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & -i \\ 2-i & 1+i \end{bmatrix}$$

2. La

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Finn vektorprojeksjonen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$. Tegn $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og vektorprojeksjonen i samme koordinatsystem.

3. Hvilke matriser representerer projeksjoner?

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Hvilke av vektorene er ortogonale med hverandre?

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$

5. Beregn $P_{\mathbf{u}}$, $I - P_{\mathbf{u}}$, $P_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ og $\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ når

a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

6. Vis at vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

utgjør en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$, og finn koordinatene til punktet

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i denne basisen.

7. Finn en ortonormal basis for rommet utspent av

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$

8. Finn vektoren

$$\begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix}$$

sin komponent i rommet utspent av vektorene

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

9. Bruk minste kvadraters metode på det overbestemte systemet

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ **b)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1-i \\ i & i & -1 & 1+i \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & i & 1 & 1 \end{array}\right]$

10. Vi skal finne polynomer som passer til punktene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

a) Det finnes et entydig fjerdegradspolynom som går gjennom alle punktene. Sett opp et ligningssystem for koeffisientene til dette polynomet.

b) Det finnes ingen annengradspolynomer som reiser gjennom alle punktene. Bruk minste kvadraters metode til å finne koeffisientene til det annengradspolynomet som passer best.

11. Nå skal vi finne polynomer som passer til datasettet

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 28 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 65 \end{bmatrix}.$$

a) Finn polynomet $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ med best tilpasning.

b) Ser du noe artig?

12. Anta at $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$. Vis at den inverse matrisen til $A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$ er gitt ved $A^{-1} = A^\top$.

13. Vis at en samling vektorer som er parvis ortogonale, og forskjellige fra null, er lineært uavhengige.

14. Vis at $\mathbf{v}^*\mathbf{w} = \overline{\mathbf{w}^*\mathbf{v}}$.

15. Vis at $P_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$ og $\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$ er ortogonale.