Øving 11 (frist 9. november)

Oppgaver til kapittel 13

1. Finn matrisenes egenverdier og egenvektorer, og avgjør om matrisene er diagonaliserbare.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

2. La $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Beregn A^{10}.

(Hint: Se på $A = VDV^{-1}$. Hva blir A^n?)

3. Finn V og D slik at $A = VDV^*$.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3-i \\ 3+i & 4 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

4. La $A = \begin{bmatrix} r_1 & z \\ \bar{z} & r_2 \end{bmatrix}$ være en symmetrisk 2×2-matrise. Utled en formel for egenverdiene til A.

5. La $a \neq b$ være to reelle tall, begge ulik null, og la

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}.$$

Avgjør om A er diagonaliserbar, og finn egenverdier og egenvektorer.

6. En kompleks matrise A er *normal* dersom $A^*A = AA^*$. Vis at dersom A er symmetrisk, er A normal.

Fun fact: En kompleks matrise er ortogonalt diagonaliserbar hvis og bare hvis den er normal.

7. La $A = \begin{bmatrix} 5 & -1-2i \\ -1-2i & 5 \end{bmatrix}$.

a) Er A symmetrisk?

b) Er A ortogonalt diagonaliserbar?

c) Er A normal?

8. La $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være lineærtransformasjonen som deriverer annengradspolynomer:

$$T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b.$$

a) Finn matrisen A til T med hensyn på basisen $(1, x, x^2)$.

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til A. Er A diagonaliserbar?

9. La $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være lineærtransformasjonen mellom andregradspolynom gitt ved:

$$T(f) = (x+1)f'(x) + f(x).$$

a) Finn matrisen A til T med hensyn på basisen $(1, x, x^2)$.

b) Finn egenverdiene og egenvektorene A. Er A diagonaliserbar?

10. Lineærtransformasjonen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, der A er matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

roterer vektorer i $\mathbb{R}^2$.

a) Hva er rotasjonsvinkelen?

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen.

c) Egenvektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ danner en basis for $\mathbb{C}^2$. Hva er standardmatrisen til T i denne basisen?