Øving 12 (frist 16. november)

Oppgaver til kapittel 14

1. Skissér faseplottet til systemet $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ når

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

2. Finn generell løsning av $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ når

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

3. Løs initialverdiproblemene $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ når

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. Løs initialverdiproblemet

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{y}', \quad \mathbf{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Vis at systemet

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

med en gitt initialverdi $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ har en entydig løsning.

Hint: Du kan anta at den generelle løsningen inneholder alle løsninger.

6.[Utfordring]
Husk at glatte funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er et vektorrom. På samme måte danner glatte vektorfunksjoner $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et vektorrom V med addisjon

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t),$$

og skalarmultiplikasjon

$$(c\mathbf{f})(t) = c\mathbf{f}(t).$$

a) Forklar hvorfor alle løsningene til et system $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ danner et underrom av V.

b) Hva er dimensjonen til rommet av alle løsninger til

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{y}'?$$

Hint: Bruk forrige oppgave.

Oppgaver til kapittel 15

1. Skriv om følgende andre ordens differensiallikninger til system.

a) $y'' - y = 0$

b) $y'' + 2y' + 3y = 0$

c) $y'' + y' = 0$

2. Finn generell løsning av

a) $y'' - y' - 2y = 0$

b) $y'' + y = 0$

c) $y'' - 4y' + 4y = 0$

3. Løs initialverdiproblemet

a) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

b) $y'' + y = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

c) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(0) = -e^{-2}$

4. Finn generell løsning av

a) $y'' - y' - 2y = e^{-2t}$

b) $y'' - y' - 2y = e^{2t}$

c) $y'' + y = t$

d) $y'' - 4y' + 4y = 4t$

5. For alle likningene i oppgave **15.1.** skal du: regne ut det karakteristiske polynomet til differensiallikningen, og det karakteristiske polynomet til matrisen i tilhørende system. Ser du en sammenheng? Klarer du å bevise observasjonen din?