Innlevering 2 (frist 20. september)

Oppgaver til kapittel 3

1. Løs ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for

a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 \\ -8 & -7 & 3 \\ -4 & 5 & -8 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. La $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være disse vektorene i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Finn en vektor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

slik at $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ spenner ut $\mathbb{R}^3$, og løs likningen $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = 0$.

3. La p og q være følgende polynomer:

$$p(x) = x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = 4x^2 + 18x + 4$$

a) La s være polynomet $s(x) = x^2 + 8x + 2$. Finnes det konstanter a og b slik at

$$s(x) = a \cdot p(x) + b \cdot q(x)$$

for alle x?

b) Finn et andregradspolynom t som oppfyller følgende: For hvert andregradspolynom r skal det være mulig å finne konstanter a, b og c slik at

$$r(x) = a \cdot p(x) + b \cdot q(x) + c \cdot t(x)$$

Oppgaver til kapittel 4

1. La $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være vektorer i $\mathbb{R}^2$, og A en 2×2-matrise slik at:

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Regn ut $A\mathbf{w}$, der $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

2. Er følgende matriser inverterbare? I så fall, finn den inverse og sjekk at svaret ditt er riktig.

a) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

3. La A og B være to 2×2-matriser. Betrakt ligningen

$$AX = B,$$

hvor X er en ukjent 2×2-matrise.

a) Forklar hvorfor ligningen er ekvivalent med å løse to 2×2-ligningssystemer samtidig. Hvordan generaliseres denne påstanden for $n \times n$-matriser?

b) Løs ligningen for $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

4. La A, B og C være 2×2-matriser. Betrakt ligningen

$$AX + XB = C,$$

hvor X er en ukjent 2×2-matrise.

a) Hvorfor kan man *ikke* løse denne ligningen som to 2×2-ligningssystemer samtidig?

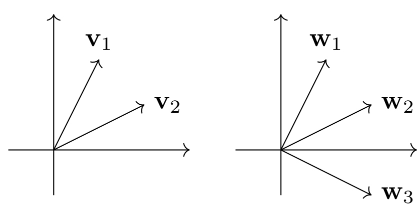
b) Skriv om ligningen til fire ligninger med fire ukjente. Hva er totalmatrisen?

c) Løs ligningen når A, B og C er følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgaver til kapittel 5

1. De to bildene viser vektorer i $\mathbb{R}^2$.



I hvert tilfelle: Er vektorene på tegningen lineært uavhengige? Utspenner de $\mathbb{R}^2$? Begrunn svarene dine.

2. Er vektorene lineært uavhengige?

a)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i \\ 2i \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5-3i \\ 10+2i \\ 4+6i \end{bmatrix}$$

Oppgaver til kapittel 6

1. Regn ut determinanten til følgende matriser og avgjør om kolonnene er lineært uavhengige.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ -6 & 15 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2i & -5 & 3 \\ 2 & -4i & 7 \\ -6 & 15 & i \end{bmatrix}$

2. Skisser parallellogrammet utspent av følgende vektorer i $\mathbb{R}^2$, og regn ut arealet.

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

ß

3. La A være matrisen

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & z \end{bmatrix}.$$

a) Finn det A uttrykt ved a, b, c og x, y, z.

b) For hvilke a, b, c og x, y, z er A inverterbar?