Innlevering 3 (frist 4. oktober)

Oppgaver til kapittel 7

1. Avgjør om følgende delmengder i $\mathbb{R}^2$ er underrom av $\mathbb{R}^2$.

a) Alle x, y slik at $x + y = 0$.

b) Alle x, y slik at $x + y = 1$.

c) $\mathbb{Q}^2$

2. La A og B være følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Finn en basis for kolonnerommet, nullrommet og radrommet til A, og finn dimensjonen til hvert av disse rommene.

b) Gjør det samme for matrisen B.

c) Ligger vektoren $(0, 1, -2, 3, -1, -1, 1)$ i nullrommet til A? Ligger den i nullrommet til B?

d) Ligger vektoren $(-1, -1, -1, -1)$ i kolonnerommet til A? Ligger den i kolonnerommet til B?

3.

a) Finn en basis for $\mathcal{P}_2$. Vis at det faktisk er en basis.

b) Hva er koordinatene til $1 + 2x + 3x^2$ i basisen du fant for $\mathcal{P}_2$?

c) Finn en basis for $\mathcal{P}_n$, der $n \geq 0$.

4. La $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Se på planet i $\mathbb{R}^3$ som består av alle vektorer på formen

$$\mathbf{u} + s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2$$

der s og t er vilkårlige tall. Er dette planet et underrom av $\mathbb{R}^3$?

b) Er planet som består av alle vektorer på formen

$$\mathbf{v} + s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2$$

et underrom av $\mathbb{R}^3$?

c) La $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$ være matrisen som har $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ som kolonner. Ligger vektoren $\mathbf{u}$ i kolonnerommet til denne matrisen? Hva med $\mathbf{v}$? Sammenlign med det du fant ut i del **a)** og **b)**.

5. La A være en $m \times n$-matrise hvor $m < n$. Hvilke av følgende påstander kan vi da konkludere med?

a) $\dim \operatorname{Col} A > 0$

b) $\dim \operatorname{Null} A > 0$

Oppgaver til kapittel 8

1. Finn ut om funksjonen T er en lineærtransformasjon. Hvis den er det: Finn standardmatrisen til T, regn ut $\ker T$ og $\operatorname{im} T$, og finn ut om T er injektiv, og om den er surjektiv.

a) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sin x + \cos y \\ -\sin y \end{bmatrix}$

b) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = e^x + e^y$

c) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8x - 7y \\ 3z - 8x - 7y \\ 5y - 4x - 8z \\ 6y - 6x - 4z \end{bmatrix}$

d) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$

e) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = x + 2y + 3z + 4w$

2. Finn standardmatrisen til lineærtransformasjonen

a) … $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som speiler planet om x-aksen.

b) … $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som roterer planet med $\frac{3}{4}\pi$.

3. La S og R være som i forrige oppgave. Finn standardmatrisene til sammensetningene $S \circ R$ og $R \circ S$. Gi en geometrisk beskrivelse av hva disse lineærtransformasjonene gjør.

4. La $D\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ være funksjonen som sender hvert polynom til den deriverte av polynomet:

$$D(p) = p'$$

La $G\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ være funksjonen som ganger polynomet den får inn med x:

$$G(p) = q, \quad \text{der} \;\; q(x) = x \cdot p(x).$$

a) Vis at D og G er lineærtransformasjoner.

b) Finn bildet og kjernen til D og til G.

c) Finn ut om D og G er injektive og/eller surjektive.

d)

Beskriv lineærtransformasjonen $(D \circ G) - (G \circ D)$.

e) Nå begrenser vi oss til endeligdimensjonale polynomvektorrom. For hvert positive heltall n definerer vi lineærtransformasjoner

$$D_n : \mathcal{P}_n \to P_{n-1} \quad \text{og} \quad G_n : \mathcal{P}_{n-1} \to P_n$$

på samme måte som vi definerte D og G. Velg en passende basis for hvert av vektorrommene $\mathcal{P}_2$ og $\mathcal{P}_3$, og finn matrisene for D_3 og G_3 med hensyn på disse basisene.

5. La $D\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ være funksjonen som er gitt ved derivasjon:

$$D(f) = f'$$

a) Vis at D er en lineærtransformasjon.
Hint: I Matematikk 1 lærte vi regneregler for derivasjon av i) en sum av to funksjoner og ii) en funksjon multiplisert med en konstant. Du kan bruke disse.

b) Finn kjernen $\ker D$ av lineærtransformasjonen D. Er $\ker D$ et endeligdimensjonalt vektorrom? I så fall: Finn en basis.

c) Er D surjektiv?
Hint: Analysens fundamentalteorem.