Innlevering 4 (frist 18. oktober)

Oppgaver til kapittel 9

1. Hvilke matriser representerer projeksjoner?

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Hvilke av vektorene er ortogonale med hverandre?

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$

3. Bruk Gram-Schmidts metode for å finne en ortogonal basis med utgangspunkt i:

a) Vektorene oppgitt i oppgave 2a.

b) Vektorene oppgitt i oppgave 2b.

c) Vektorene oppgitt i oppgave 2c.

4. Hva blir den ortogonale projeksjonen av

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ned på vektorene gitt i oppgave 2a?

b) $\begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$ ned på vektorene gitt i oppgave 2b?

c) $\begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix}$ ned på vektorene gitt i oppgave 2c?

5. La

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$. Tegn $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og projeksjonen i samme koordinatsystem. Hva er vinkelen mellom vektorene?

6. Beregn $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ og $\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ når

a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} i \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) Hva er $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}))$ i del **a)-c)**?

7. La $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Regn ut den ortogonale projeksjonen av $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\mathbf{v}$.

b) Finn standardmatrisen $[P_{\mathbf{v}}]$ til $P_{\mathbf{v}}$.

c) Gi et geometrisk argument til å avgjøre om $P_{\mathbf{v}}$ er surjektiv og/eller injektiv.

d) Gi et geometrisk argument til å bestemme dimensjonen til $\ker P_{\mathbf{v}}$, $\mathrm{Null}[P_{\mathbf{v}}]$, $\mathrm{im}\, P_{\mathbf{v}}$ og $\mathrm{Col}[P_{\mathbf{v}}]$.

8. La $W = \mathrm{Sp}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ hvor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en ortogonal basis for W.

b) Regn ut standardmatrisen $[P_W]$ til den ortogonale projeksjonen $P_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ned på W.

c) Finnes det en 3×2–matrise A slik at $[P_w]A\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$? I så fall, finn den.
Hint: Tenk geometrisk her.

9. Vi ser på indreproduktrommet av stykkevis kontinuerlige funksjoner over $[0, 1]$.

a) Regn ut vinkelen mellom x og $\cos x$; x og $\sin x$. Hvilken vinkel er minst?

b) Regn ut avstanden mellom x og $\cos x$; x og $\sin x$. Hvilken avstand er minst?
Hint: Husk at avstanden mellom to vektorer f og g er lengden til $f - g$.

c) Skissér x, $\cos x$ og $\sin x$ på intervallet $[0, 1]$. Gi en geometrisk forklaring på de numeriske verdiene du fant i del **a)–b)**.

10. Anta at $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$. Vis at den inverse matrisen til $A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$ er gitt ved $A^{-1} = A^\top$.