Innlevering 5 (frist 1. november)

Oppgaver til kapittel 10

1. Finn egenverdier og tilhørende egenvektorer til følgende matriser.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

Hint for del **d)**: Polynomdivisjon. Hvis ikke $\lambda = 1$ fungerer, prøv $\lambda = 2$. Hvis ikke $\lambda = 2$ fungerer, prøv $\lambda = 3, \ldots$

2.

a) Vis at matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ikke har noen reelle egenverdier.

b) Gi en geometrisk forklaring på del **a)**.

3.

a) Finn vektorene som svarer til at

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er blitt rotert med θ radianer.

b) Utled formelen for 2×2-matrisen T_θ som roterer vektorer θ radianer mot klokken ved multiplikasjon. Hint: Hva skjer når du ganger T_θ med $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$?

c) For hvilke verdier av θ har T_θ en reell egenverdi? Gi en geometrisk forklaring.

4.

a) Regn ut egenverdiene til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 77 \end{bmatrix}.$$

b) Finn egenrommene til de ulike egenverdiene.

c) A er en 4×4-matrise. Er det alltid enkelt å finne egenverdiene til en 4×4-matrise? Mer generelt, er det alltid enkelt å finne egenverdiene til $n \times n$-matriser?

5. La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 28 & 30 & -20 & -2 \\ 6 & 40 & -10 & -4 \\ 4 & 10 & 20 & -6 \\ 2 & 20 & -30 & 32 \end{bmatrix}$$

a) Hvilke av vektorene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer for A?

b) Finn alle egenverdiene til A, og de tilhørende egenrommene.

6. La A være en $n \times n$-matrise slik at $A^2 = A$. Hva kan du da si om egenverdiene til A?
Hint: Prøv å finne noen forskjellige matriser A som er slik at $A^2 = A$. Kan du finne en slik matrise som ikke har noen egenverdier? En som har én egenverdi? To egenverdier? Flere enn to?

7. Vis at dersom en matrise har egenverdien 0, er den ikke inverterbar.

Oppgaver til kapittel 11

1. Finn matrisenes egenverdier og egenvektorer, og avgjør om matrisene er diagonaliserbare.

a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

2. Finn P og D slik at $A = PDP^{-1}$ for

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}.$$

3. La $A = \begin{bmatrix} r_1 & z \\ \overline{z} & r_2 \end{bmatrix}$ være en 2×2-matrise med $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ og $z \in \mathbb{C}$. Utled en formel for egenverdiene til A. Vis at egenverdiene er reelle.

4. La $a \neq b$ være to reelle tall, begge ulik null, og la

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}.$$

Avgjør om A er diagonaliserbar, og finn egenverdier og egenvektorer.

5. La $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være lineærtransformasjonen mellom andregradspolynom gitt ved:

$$T(f) = (x+1)f'(x) + f(x).$$

a) Finn matrisen A til T med hensyn på basisen $(1, x, x^2)$.

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til A. Er A diagonaliserbar?

6. Lineærtransformasjonen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, der A er matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

roterer vektorer i $\mathbb{R}^2$.

a) Hva er rotasjonsvinkelen?

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen.

c) Egenvektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ danner en basis for $\mathbb{C}^2$. Hvilken matrise representerer T med hensyn til denne basisen?