Løsningsforslag øving 8

9.1. Den adjungerte matrisen til en matrise A, A^*, er matrisen man får ved å transponere A og så komplekskonjugere hvert element. Kaller vi matrisen i oppgaveteksten B har vi:

$$B^* = \begin{bmatrix} 1-i & 2 & 2+i \\ 1+i & i & 1-i \end{bmatrix}$$

9.2. Vi bruker indreproduktet definert i teorem 9.30. Vi beregner vinkelen som definert under teorem 9.10.

a) Det følger at

$$\langle -x, e^x \rangle = -\int_0^1 xe^x dx = -1 \neq 0.$$

Indreproduktet er lik -1, og funksjonene er dermed ikke ortogonale.

Vi får at lengdene er

$$\|-x\| = \sqrt{\langle -x, -x \rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

og

$$\|e^x\| = \sqrt{\langle e^x, e^x \rangle} = \sqrt{\int_0^1 e^{2x} dx} = \sqrt{\frac{1}{2}(e^2-1)}.$$

Det følger at vinkelen er

$$\begin{aligned} \Theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\langle -x, e^x \rangle}{\|-x\|\|e^x\|}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(e^2-1)}}\right) \\ &= 165.7^\circ \end{aligned}$$

Vi konkluderer at funksjonene er nesten parallelle, men går i motsatt retning av hverandre. Husk at $\Theta \approx 0$ betyr at de er ca parallelle, $\Theta \approx 90$ betyr at de er ca ortogonale og $\Theta \approx 180$ parallelle i motsatte retninger.

b) Det følger at

$$\langle x^3 - \frac{1}{3}x, x - \sin x \rangle = \int_0^1 (x^3 - \frac{1}{3}x)(x - \sin x) dx = 0.012.$$

Indreproduktet er ulik 0, og funksjonene er dermed ikke ortogonale.

Vi får at lengdene er

$$\begin{aligned} \|x^3 - \frac{1}{3}x\| &= \sqrt{\langle x^3 - \frac{1}{3}x, x^3 - \frac{1}{3}x \rangle} \\ &= \sqrt{\int_0^1 (x^3 - \frac{1}{3}x)^2 dx} \\ &\approx 0.216 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \|x - \sin x\| &= \sqrt{\langle x - \sin x, x - \sin x \rangle} \\ &= \int_0^1 (x - \sin x)^2 dx \\ &\approx 0.061. \end{aligned}$$

Det følger at vinkelen er

$$\begin{aligned} \Theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\langle x^3 - \frac{1}{3}x, x - \sin x \rangle}{\|x^3 - \frac{1}{3}x\|\|x - \sin x\|}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{0.012}{0.216 \cdot 0.061}\right) \\ &= \cos^{-1}(0.91) \\ &= 24.49^\circ. \end{aligned}$$

Vi konkluderer at funksjonene er nesten parallelle.

c) Det følger at $\langle x, x^2 - \frac{3}{4}x \rangle = \int_0^1 x(x^2 - \frac{3}{4}x)dx = 0$. Indreproduktet er lik 0, og funksjonene er dermed ortogonale. Det følger også at vinkelen $\Theta = 90^\circ$.

9.3. Vi bruker Gram-Schmidt for å finne en ortogonal basis. La $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi setter $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1$ og regner ut $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \frac{8}{5}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 18 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$. Vi projiserer vektoren $(i, 2+i, 1)$ ned på hver basisvektor og summerer, slik teorem 9.16 sier vi kan. Da får vi følgende litt hårete utregning:

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{U}} \begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix} &= P_{\mathbf{u}_1} \begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix} + P_{\mathbf{u}_2} \begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4+3i \\ 8+6i \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{430}\begin{bmatrix} -234+162i \\ 117-81i \\ -65+45i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{86}\begin{bmatrix} 22+84i \\ 161+87i \\ -13+9i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

9.4.

a) La $\mathbf{v}_1 = 1$. La så $\mathbf{v}_2 = x - \frac{\langle 1,x\rangle}{\langle 1,1\rangle}1 = x - \frac{1}{2}$. Til slutt la $\mathbf{v}_3 = x^2 - \frac{\langle 1,x^2\rangle}{\langle 1,1\rangle}1 - \frac{\langle x-\frac{1}{2},x^2\rangle}{\langle x-\frac{1}{2},x-\frac{1}{2}\rangle}\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}$. Da utgjør $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ en ortogonal basis for $\mathrm{Sp}\{1, x, x^2\}$.

b) Dette er ikke samme svar som Eksempel 9.33 i notatet, men det gjør ingenting. Det finnes selvsagt mange ortogonale basiser for et gitt indreproduktrom.

9.5.

a) Ved å regne ut på samme måte som tidligere i denne øvingen så får vi følgende lengder:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\|x^2\| = \sqrt{\langle x^2, x^2\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^4 dx} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\|x^3\| = \sqrt{\langle x^3, x^3\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^6 dx} = \frac{1}{\sqrt{7}},$$

$$\|x^4\| = \sqrt{\langle x^4, x^4\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^8 dx} = \frac{1}{\sqrt{9}},$$

$$\|x^5\| = \sqrt{\langle x^5, x^5\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^{10} dx} = \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

b) Generelt får vi:

$$\|x^n\| = \sqrt{\langle x^n, x^n\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^{2n} dx} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Vi ser dermed at når $n \to \infty$ så $\|x^n\| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0$.

c) Følgende figur illustrerer grafen til x^n når n vokser. Arealet under grafen minsker, og dermed minsker også lengden til x^n.