Løsningsforslag øving 10

Det opplyses om at oppgave 2b) er løst veldig detaljert.

11.1.

a) Matrisen har karakteristisk polynom $\det(A - \lambda I) = \lambda^2$, og derfor bare egenverdien 0, med tilhørende egenvektor $\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$. Siden vi ikke har to lineært uavhengige egenvektorer er matrisen ikke diagonaliserbar.

b) Matrisen har karakteristisk polynom $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2(5-\lambda)$, og derfor egenverdiene 2 og 5, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\} \quad \text{og} \quad \operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}25\\15\\9\end{bmatrix}\right\}.$$

Siden vi ikke har tre lineært uavhengige egenvektorer er matrisen ikke diagonaliserbar.

c) Matrisen har karakteristisk polynom $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 3)(\lambda + i)(\lambda - i)$, og derfor egenverdiene $3, -i$ og i, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}, \quad \operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}-i\\1\\0\end{bmatrix}\right\}, \quad \operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}i\\1\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Matrisen har altså tre lineært uavhengige egenvektorer, så den er diagonaliserbar.

d) Matrisen har karakteristisk polynom $\det(A - \lambda I) = \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$, og derfor egenverdiene 1 og -1, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}, \quad \operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Matrisen har altså tre lineært uavhengige egenvektorer, så den er diagonaliserbar.

e) Matrisen har karakteristisk polynom $\det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 3)(\lambda + i)(\lambda - i)$, og derfor egenverdiene $0, 3, -i$ og i, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}-6\\5\\0\\1\end{bmatrix}\right\}, \quad \operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}39\\113\\30\\40\end{bmatrix}\right\},$$

og

$$\operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}-i\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}, \quad \operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}i\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Matrisen har altså fire lineært uavhengige egenvektorer, så den er diagonaliserbar.

f) Matrisen har karakteristisk polynom $\det(A - \lambda I) = \lambda^4$, og derfor bare egenverdien 0 med multiplisitet fire og tilhørende egenrom

$$\operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Siden vi ikke har fire lineært uavhengige egenvektorer er matrisen ikke diagonaliserbar.

g) Matrisen har karakteristisk polynom $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)^4$, og dermed bare egenverdien 1 med multiplisitet fire og tilhørende egenrom

$$\operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Siden vi ikke har fire lineært uavhengige egenvektorer er matrisen ikke diagonaliserbar.

h) Matrisen har karakteristisk polynom $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)^4 = 0$, og dermed bare egenverdien 1 med multiplisitet fire og tilhørende egenrom

$$\operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Siden vi ikke har fire lineært uavhengige egenvektorer er matrisen ikke diagonaliserbar.

11.2.

a) Vi vet fra forelesningen om diagonalisering at egenveridiene til A er 3 og -5 med egenvektorer henholdsvis $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$. Vi definerer derfor

$$D = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & -5\end{bmatrix} \text{ og } P = \begin{bmatrix}3 & 1\\2 & -2\end{bmatrix}$$

og regner ut

$$P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}.$$

Nå vet vi at $A = PDP^{-1}$, og derfor at $A^k = PD^kP^{-1}$. Vi uttrykker dette siste produktet eksplisitt:

$$\begin{aligned}A^k &= \begin{bmatrix}3 & 1\\2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^k & 0\\0 & (-5)^k\end{bmatrix}\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{8}\begin{bmatrix}6\cdot 3^k + 2\cdot(-5)^k & 3\cdot 3^k - 3(-5)^k\\4\cdot 3^k - 4\cdot(-5)^k & 2\cdot 3^k + 6\cdot(-5)^k\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

For $k = 10$ hjelper lommeregneren oss med å finne at

$$\begin{bmatrix} 2485693 & -3639966 \\ -4853288 & 7338981 \end{bmatrix}.$$

b) Vi starter med å finne en diagonalisering $A = PDP^{-1}$ av A. Det fremkommer av beviset til teorem 12.2 at kolonnene til P må være egenvektorer for A. Siden P skal være inverterbar må disse egenvektorene være lineært uavhengige. Vi finner derfor først basiser for egenrommene til A.

Siden A er øvre triangulær, er egenverdiene til A bare tallene på diagonalen: 2, 3 og 5. Vi lager matrisen P ved å sette sammen egenvektorer som hører til de tre egenverdiene, og vi lager matrisen D ved å sette egenverdiene på diagonalen i den korresponderende rekkefølgen:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 25 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Vi bruker radreduksjon, og det faktum at hvis $[B|I] \sim [I|C]$, da er $B^{-1} = C$ til å regne ut at

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 10/3 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Den utregningen ser slik ut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -\frac{25}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Dermed har vi diagonalisert matrisen A.

Legg merke til at når $A = PDP^{-1}$, så har vi

$$\begin{aligned} A^2 &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^2P^{-1}, \\ A^3 &= (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^3P^{-1}, \end{aligned}$$

og så videre. Generelt:

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

For $n = 10$ har vi:

$$\begin{aligned} A^{10} &= PD^{10}P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 25 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 10/3 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1024 & 174075 & 40250650 \\ 0 & 59049 & 24266440 \\ 0 & 0 & 9765625 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

11.3.

a) Det karakteristiske polynomet til matrisen, vi kaller den A, er

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3-i \\ 3+i & 4-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda)(4-\lambda) - (3-i)(3+i) \\ &= \lambda^2 - 6\lambda - 2, \end{aligned}$$

og egenverdiene er $3 + \sqrt{11}$ og $3 - \sqrt{11}$.

Egenrommet korresponderende til en egenverdi λ er nullrommet til $A - \lambda \cdot I_2$. Dette er fordi $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ hvis og bare hvis $(A - \lambda \cdot I_2)\mathbf{x} = 0)$. Regning viser at

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3-i \\ 1+\sqrt{11} \end{bmatrix}$$

er en egenvektor for egenverdien $3 + \sqrt{11}$, og at

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3-i \\ 1-\sqrt{11} \end{bmatrix}$$

er en egenvektor for egenverdien $3 - \sqrt{11}$. Da kan vi sette

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 3+\sqrt{11} & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{11} \end{bmatrix}$$

b) Det karakteristiske polynomet er

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 36\lambda$$

Egenverdiene er 0, 4 og 9. Vi finner tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Da kan vi sette

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

c) Vi vet fra oppgave 1d at egenverdiene er 1, 1 og -1 med tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da kan vi sette

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

d) Vi vet fra oppgave 1c at egenverdiene er 3, $-i$ og i med tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da kan vi sette

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

11.4.

a) Siden 1 er den første basisvektoren skal første kolonne ha koordinatene til $T(1) = 0$. Disse er alle 0. Kolonne to skal ha koordinatene til $T(x) = 1$. Siden $1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$ er kolonne to $1, 0, 0$. Siden $T(x^2) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$ er siste kolonne $0, 2, 0$. Matrisen som representerer T med hensyn til basisen $(1, x, x^2)$ er derfor

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi minner om at dette vil si at koordinatene til $T(a + bx + cx^2)$ er $A \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$.

b) Matrisen A er ikke diagonaliserbar: Vi ser at $\lambda = 0$ er den eneste egenverdien. Men egenrommet til 0 er opplagt ikke tredimensjonalt, så det finnes ingen basis for $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer for A. Alternativt kan vi si at dersom $A = PDP^{-1}$ med D diagonal måtte $D = 0$, for 0 er den eneste egenverdien til A. Men $PDP^{-1} = 0 \neq A$.

11.5. Vi får at ligningen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ for lineærtransformasjonen er:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 3x_3 \end{bmatrix}$$

Vi vet fra oppgave 1c og 3d at denne matrisen er diagonaliserbar.