Løsningsforslag øving 2

2.1.

2.2. Matrise (a), (c) og (d) er på trappeform; (a) og (d) er på redusert trappeform.

2.3. Metode: gausseliminasjon.

a) Radreduser totalmatrisen til systemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{bmatrix}$$

Rad tre betyr
$$11z = 22,$$
som gir $z = 2$. Rad to betyr
$$-5y + 3z = 1,$$
sett inn $z = 2$ for å finne $y = 1$. Rad en betyr
$$x + y - z = 0,$$
sett inn $z = 2$ og $y = 1$ for å finne $x = 1$.

b) Radreduser totalmatrisen til systemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Nederste ligning betyr
$$0x + 0y + 0z = 4,$$
eller $0 = 4$. Dette er ikke sant: Ingen løsning

c) Radreduser totalmatrisen til systemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rad tre betyr
$$0x + 0y + 0z = 0,$$
eller $0 = 0$. Denne gir altså ingen krav til hva x, y og z kan være. Rad en og to gir to ligninger med tre ukjente:
$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -5y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Vi får en fri variabel. Her er det lurt å velge y eller z som fri variabel ettersom de er i begge ligningene. Jeg setter $z = t$ – men du må gjerne velge y, eller x. Den andre ligningen gir en parametrisering av y som funksjon av t:
$$y = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}t.$$
Innsatt i første ligning får vi en parametrisering av x som funksjon av t:
$$x + (-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}t) - t = 0,$$
eller
$$x = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}t.$$
Nå har vi en parametrisering av alle løsningene:
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$
Men hvis jeg bytter ut t med $5t$ får vi en – kanskje – enda finere parametrisering:
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$
Merk: Dersom du får en annen parametriser kan du sjekke at svaret ditt er riktig ved å verifisere om i) du har akkurat en fri variabel og ii) parametriseringen din tilfredstiller ligningen i oppgaven. Jeg skal være grei og gi deg et eksempel på ii) for x, y og z som ovenfor: Vi må sjekke om
$$x = \frac{1}{5} + 2t, \quad y = -\frac{1}{5} + 3t, \quad z = 5t,$$
tilfredstiller ligningene:
$$\begin{aligned} x + y - z &= \frac{1}{5} + 2t - \frac{1}{5} + 3t - 5t = 0 \\ 2x - 3y + z &= 2(\frac{1}{5} + 2t) - 3(-\frac{1}{5} + 3t) + 5t = 1 \\ 4x - y - z &= 4(\frac{1}{5} + 2t) - (-\frac{1}{5} + 3t) - 5t = 1 \end{aligned}$$

OK.

d) Radreduserer totalmatrisen til systemet:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & -3 & 1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -5 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

Dette er akkurat samme ligninger som vi reduserer til i del **c)**, og derfor har vi like løsninger:

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5}\\ 0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 5\end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

e) Vi gausseliminerer på vanlig måte. Merk at det er litt vanskeligere å dele komplekse tall (vi må gange nevner og teller med nevner konjugert). Bytt rad en med rad to:

$$\begin{bmatrix}i & 1 & -1\\ 1 & i & i\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & i & i\\ i & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Legg til rad en multiplisert med $-i$ til rad to:

$$\begin{bmatrix}1 & i & i\\ i & 1 & -1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & i & i\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

Del rad to på 2, legg til rad to multiplisert med $-i$ til rad en:

$$\begin{bmatrix}1 & i & i\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & i\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Løsning: $z = i$, $w = 0$, hvor vi har valgt å kalle første variabel for z og andre for w.

f) Bytt rad en med rad to:

$$\begin{bmatrix}1-i & 1 & 1\\ 1 & i & 1+i\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & i & 1+i\\ 1-i & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Legg til rad en multiplisert med $-(1-i)$ til rad to:

$$\begin{bmatrix}1 & i & 1+i\\ 1-i & 1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & i & 1+i\\ 0 & -i & -1\end{bmatrix}$$

Multipliser rad 2 med i:

$$\begin{bmatrix}1 & i & 1+i\\ 0 & -i & -1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & i & 1+i\\ 0 & 1 & -i\end{bmatrix}$$

La oss kalle variablene henholdsvis z og w. Da sier ligning 2 at $w = -i$, så $iw = 1$ og ligning 1 gir $1+i = z + iw = z + 1$, så $z = i$.

g) Bytt rad en med rad to:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ i & 1 & 1 & 1+i\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}i & 1 & 1 & 1+i\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Del rad en med i, det vil si gang den med $-i$:

$$\begin{bmatrix}i & 1 & 1 & 1+i\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -i & -i & 1-i\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Legg til rad to multiplisert med i til rad 1

$$\begin{bmatrix}1 & -i & -i & 1-i\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1+i\end{bmatrix}$$

Vi kaller variablene z, w og u, og lar $u = t$ være fri siden kolonnen dens ikke inneholder noe pivotelement. Nederste rad betyr $0z + w + u = 1 + i$, så $w = 1 + i - t$. Rad 1 gir z= 1.

h) Bytt plass på radene:

$$\begin{bmatrix}3 & -6 & 6 & -15\\ 1 & 1 & 4 & 10\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 4 & 10\\ 3 & -6 & 6 & -15\end{bmatrix}$$

Legg -3 ganger rad 1 til rad 2:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 4 & 10\\ 3 & -6 & 6 & -15\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 4 & 10\\ 0 & -9 & -6 & -45\end{bmatrix}$$

Del rad 2 på -9:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 4 & 10\\ 0 & -9 & -6 & -45\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 4 & 10\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 5\end{bmatrix}$$

Vi lar tredje variabel være fri, $z = t$. Ligning 2 gir $y = 5 - \frac{2}{3}t$, og ligning 1 $x = 10 - 4z - y = 10 - 4t - 5 + \frac{2}{3}t = 5 - \frac{10}{3}t$.

2.4.

La 1 betegne mulig og 0 umulig:

	$m < n$	$m = n$	$m > n$
ingen løsninger	1	1	1
én løsning	0	1	1
uendelig mange løsninger	1	1	1

Forklaring: I hvert tilfelle må vi enten finne et eksempel (i så fall er det jo mulig – vi fant et eksempel!), eller forklare hvorfor det ikke er mulig å finne et eksempel.

Ingen løsning: Uavhengig av hvor mange ligninger og ukjente vi skal ha kan vi lage et eksempel hvor en av ligningene sier $0 = 1$. Dette korresponderer til parallelle linjer/plan/rom med ingen felles punkter.

Uendelig mange løsninger: Vi må forsikre oss om at vi kan få til en fri variabel i hvert tilfelle. I tilfellet $m < n$ kan vi ta 1x2 systemet $x + y = 0$, hvor y er fri. For $m = n$ kan vi legge til ligningen $0 = 0$ slik at vi har to ligninger med to ukjente, og y er stadig fri. Skal vi ha flere ligninger enn ukjente kan vi legge til ligningen $0 = 0$ nok en gang.

én løsning: For $m = n$ kan vi ta ligningssystemet $x = 1$, det har en unik løsning. Dersom du ikke synes det er et skikkelig system kan du slenge på $y = 1$. For å få ett eksempel hvor $m > n$ legger vi til ligningen $0 = 0$. Men nå må vi tenke oss om, hva skjer om vi har flere ukjente enn ligninger? Vi setter opp totalmatrisen til systemet, denne er lengre enn den er høy siden vi har flere ukjente enn ligninger. Dermed kan vi ikke ha pivotelement i hver kolonne. Hver kolonne som ikke har et pivotelement gir en fri variabel. Dermed har systemet enten ingen, eller uendelig mange løsninger.

2.5.

a) Alle radoperasjoner er reversible; multiplisere en rad med et ikke-null tall c kan reverseres ved å multiplisere samme rad med $\frac{1}{c}$; bytte om på to rader kan reverseres ved å bytte om på radene igjen; å legge til et multiplum av en rad til en annen kan reverseres ved å trekke fra det som ble lagt til. Dersom $M \sim N$ betyr det at vi har gjort et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_n$ for å lage N fra M. La O_i' være den reverse radoperasjonen til O_i. Da vet vi at $\mathrm{O}_1', \ldots, \mathrm{O}_n'$ kan brukes for å lage M fra N. Dette betyr at $N \sim M$.

b) Vi antar at $M \sim L$ og $L \sim N$. Med andre finnes det et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_n$ som lager L fra M, og at det finnes et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_{n+1}, \ldots, \mathrm{O}_{n+m}$ som lager N fra L. Men da kan vi jo starte med M og bruke alle radoperasjonene for å lage N fra M. Dette betyr at $M \sim N$

2.6. Vi rydder kolonne 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & z & z^2 & 0 & 0 \\ 1 & z^2 & z & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & z-1 & z^2-1 & -3 & -9 \\ 0 & z^2-1 & z-1 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

Nå bruker vi at $z^2 - 1 = -z - 2$, som holder pga. antagelsen om z.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & z-1 & -z-2 & -6 & -18 \\ 0 & -z-2 & z-1 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

Legg rad 4 til rad 3:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & -18 \\ 0 & -z-2 & z-1 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

Del rad 3 på -3, og legg z+2 av nye rad 3 til rad 4:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2z+1 & 2z+1 & 6z+3 \end{bmatrix}$$

Del rad 4 på $2z + 1$ og bytt litt plass på radene:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi ser at $w = 2$, $z = 1$, $y = 1$ og $x = 1$.

2.7. Dersom man legger sammen ligning to og tre, får man ligningen $2x + 2y = 6$, som er inkonsistent med ligningen $x + y = 0$. Derfor har ligningssystemet ingen løsning.