Løsningsforslag øving 4

5.1.

a) Radreduser matrisen med oppgitte vektorer som kolonner eller sjekk direkte at det ikke finnes noe tall c slik at:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) Bemerk at å finne en vektor som er lineært uavhengig av vektorene i **a)** er å finne en vektor som ikke er en lineærkombinasjon av vektorene i **a)**. En løsningsmetode er derfor å først løse systemet med totalmatrise $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 18 & 0 \end{bmatrix}$, kall løsningen (x_0, y_0), og så velge en vektor

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

hvor a ikke er $-3x_0 + 4y_0$.

c) Teorem 5.14 gir at de tre vektorene spenner ut $\mathbb{R}^3$.

5.2.

a) **a)** er *nesten* riktig. Tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært avhengige dersom

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

har en ikke-triviell løsning, altså en løsning med minst en av a, b og c ulik null. Dette er ekvivalent med at *en* av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av de to andre (del likningen med en koeffisient som ikke er lik null). Påstanden i oppgaveteksten er at $\mathbf{u}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$, men dette kan vi ikke garantere! Et eksempel: La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. De tre vektorene er lineært avhengige i $\mathbb{R}^2$, men det finnes ikke a og b slik at $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$ fordi $\mathbf{u}$ ligger på x-aksen og de to andre ligger på y-aksen. Merk også at $\mathbf{w} = 2\mathbf{v} + 0\mathbf{u}$ i dette tilfellet; $\mathbf{w}$ kan altså skrives som en lineærkombinasjon av de to andre.

b) Påstanden er kjempefeil. Vi trenger bare ett moteksempel, ta $\mathbf{w} = 2 \cdot \mathbf{u}$ hvor $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært uavhengige. Opplagt er ikke $\mathbf{w}$ og $\mathbf{u}$ er lineært uavhengige, selv om både $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, og $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er det.

5.3.

a) Påstanden er usann. Et veldig enkelt moteksempel:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Påstanden er sann. Bevis:

Anta at vektorene $A\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2$, …, $A\mathbf{v}_t$ er lineært uavhengige. Vi skal vise at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_t$ også er lineært uavhengige.

Se på likningen

$$\mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_2 x_2 + \cdots \mathbf{v}_t x_t = \mathbf{0}.$$

Anta at $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ er en løsning av denne likningen, altså at

$$\mathbf{v}_1 a_1 + \mathbf{v}_2 a_2 + \cdots \mathbf{v}_t a_t = \mathbf{0}.$$

Da får vi:

$$\begin{aligned} &(A\mathbf{v}_1)a_1 + (A\mathbf{v}_2)a_2 + \cdots + (A\mathbf{v}_t)a_t \\ &\quad = A(\mathbf{v}_1 a_1 + \mathbf{v}_2 a_2 + \cdots + \mathbf{v}_t a_t) \\ &\quad = A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Men siden vi har antatt at $A\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2$, …, $A\mathbf{v}_t$ er lineært uavhengige, betyr dette at vi må ha

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_t = 0.$$

Nå kan vi oppsummere det vi har gjort: Vi startet med å si at $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ er en løsning av likningen

$$\mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_2 x_2 + \cdots \mathbf{v}_t x_t = \mathbf{0},$$

og konkluderte med at da må alle a-ene være 0. Det betyr at denne likningen kun har den trivielle løsningen, og dermed er vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_t$ lineært uavhengige.

6.1. Vi utvikler langs rad 1 og får

$$1 \cdot (-4 - 2) - 1 \cdot (-2 - 6) + 0 = -6 + 8 = 2.$$

Siden $2 \neq 0$ konkluderer vi med at kolonnene er lineært uavhengige.

6.2. Det er kanskje enklest å løse c) først. Om vi skal gå rett på a) må vi bruke at determinanten til A er lik arealet til paralellogrammet utspent av $A\mathbf{e}_1$ og $A\mathbf{e}_2$, med fortegn gitt av om $A\mathbf{e}_2$ er til venstre eller høgre for $A\mathbf{e}_1$.
Vi kan anta at vinklene θ og φ ligger i intervallet $[-\pi, \pi)$.

a) Det er kun vinkelen φ som har noe å si for om determinanten er positiv, negativ eller 0. Determinanten er 0 hvis φ er 0 eller $-\pi$, og ellers har determinanten samme fortegn som φ.

b) Hvis vi øker α_1 eller α_2, så øker determinanten; hvis vi minsker en av disse, så minker determinanten.

Hvis vi varierer φ innenfor intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$, så øker determinanten når φ øker. I intervallene $[-\pi, -\pi/2]$ og $[\pi/2, \pi)$ er det omvendt.

Å variere θ har ingen effekt på determinanten.

c) $\det A = \alpha_1 \alpha_2 \sin \varphi$

6.3.

a) Sant.
En matrise er inverterbar hvis og bare hvis determinanten ikke er lik null. Vi vet også at $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Oppgaven gir oss at $\det(AB) \neq 0$.

b) Sant.
Dette følger fra $AA^{-1} = I$ og $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

c) Usant. Ta for eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Sant. Produktregelen for determinant gir:

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) = (\det B)(\det A) = \det(BA)$$

6.4. Determinanten må være lik null.
Hint: Vi antar at $A\mathbf{u} - A\mathbf{v} = 0$ for $\mathbf{u} - \mathbf{v} \neq 0$. Ved regnereglene for matriser blir dette $A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0$. Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har altså en ikke-triviell løsning; $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Dette betyr at A ikke er inverterbar, og har derfor determinant 0.

Eksamensoppgaver

Vår 2013: Oppgave 5
Vår 2012: Oppgave 6