

# Løsningsforslag øving 6

**8.1.** Husk at en funksjon er injektiv dersom  $x \neq y$  gir  $f(x) \neq f(y)$ , men her ser vi at  $f(3) = 9 = f(-3)$ , eller generelt at  $f(z) = z^2 = f(-z)$  for alle  $z \in \mathbb{C}$ , som betyr at  $f$  ikke er injektiv. Vi ser også at  $f$  er på formen  $z^n$  for et heltall  $n$ , og vi vet fra tidligere at alle funksjoner  $z^n = w$ , for komplekse tall  $z$  og  $w$  og heltall  $n$ , ifølge algebraens fundamentalteoreme har en løsning. Dette betyr at for en gitt  $w$  så kan vi finne en  $z$  slik at  $f(z) = w$ . Dette betyr at  $f$  er surjektiv. Til slutt observerer vi at  $f$  ikke er bijektiv fordi  $f$  ikke er injektiv, da en funksjon må være både injektiv og surjektiv for å være bijektiv.

**8.2.** Vi kaller  $T$  en lineærtransformasjon dersom  $T(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aT(\mathbf{x}) + bT(\mathbf{y})$  for alle skalarer  $a, b \in \mathbb{R}$  og alle vektorer  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ . Vi sjekker om dette stemmer i hvert av punktene under. I de tilfellene hvor  $T$  ikke er en lineærtransformasjon så er det godt nok å gi et moteksempel hvor  $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \neq T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$  eller  $T(a\mathbf{x}) \neq aT(\mathbf{x})$ , enten generelt eller for noen utvalgte skalarer  $a$  og vektorer  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{y}$ .

a) Dette er ikke en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} \tan(x) \\ e^y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tan(z) \\ e^w \end{bmatrix} \\ &\neq \begin{bmatrix} \tan(z+w) \\ e^{z+w} \end{bmatrix} \\ &= T\left(\begin{bmatrix} x+z \\ y+w \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

b) Dette er en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$\begin{aligned} aT\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) &= a(2x + y) + b(2z + w) \\ &= 2(ax) + (ay) + 2(bz) + (bw) \\ &= T\left(a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Dermed går vi videre. Standardmatrisen  $A$  til lineærtransformasjonen  $T$  er

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

For å finne kjernen til  $T$  så løser vi ligningssystemet  $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , som gir oss at  $2x + y = 0$ , som igjen betyr at  $2x = -y$ . Det følger at

$$\ker T = \left\{ \begin{bmatrix} -a \\ 2a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\},$$

og dermed også at  $T$  ikke er injektiv.

Vi ser at bildet til  $T$  er et underrom av  $\mathbb{R}$ . Men spenner det ut hele  $\mathbb{R}$ ? Vi lar  $a$  være et vilkårlig element

fra  $\mathbb{R}$ , og sjekker om vi kan finne en vektor  $\mathbf{v}$  slik at  $T(\mathbf{v}) = a$ . Det kan vi, ved å for eksempel sette  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$ . Det følger at  $\text{im } T = \mathbb{R}$ , og dermed også at  $T$  er surjektiv.

c) Dette er ikke en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1, \text{ og at } T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 3,$$

som gir at

$$2T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \neq 3 = T\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

d) Dette er ikke en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$\begin{aligned} 2T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= 2(1^2 + 0^2) \\ &= 2 \\ &\neq 2^2 + 0^2 \\ &= T\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

e) Dette er en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$\begin{aligned} aT\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}\right) &= a\begin{bmatrix} x - 5y + 4z \\ y - 6z \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} u - 5v + 4w \\ v - 6w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ax - 5ay + 4az \\ ay - 6az \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bu - 5bv + 4bw \\ bv - 6bw \end{bmatrix} \\ &= T\left(a\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Dermed går vi videre. Standardmatrisen  $A$  til lineærtransformasjonen  $T$  er

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad T(\mathbf{e}_3)] = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

For å finne kjernen til  $T$  så løser vi ligningssystemet  $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Vi ser at vi får en fri variabel, og at  $\mathbf{v} = [26 \quad 6 \quad 1]^T$  er en løsning. Det følger at  $\ker T = \text{Sp}\{[26 \quad 6 \quad 1]^T\}$ , og dermed også at  $T$  ikke er injektiv.

Bildet til  $T$  er rommet utspent av kolonnene til  $A$ . Opplagt er dette hele  $\mathbb{R}^2$ . Vi gir tre bevis: Ved å regne ut at determinanten til  $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  er ulik 0 ser vi at de to første kolonnene til  $A$  allerede spenner ut  $\mathbb{R}^2$ .

Alternativt kan vi bruke at vi vet at nullrommet til  $A$  har dimensjon 1, sammen med teorem 7.27 til å regne ut at kolonnerommet har dimensjon  $3 - 1 = 2$ . Det eneste underrommet av  $\mathbb{R}^2$  som har dimensjon 2 er  $\mathbb{R}^2$  selv. En siste fremgangsmåte er å la  $\mathbf{y} = [a \ b]^T$  være et vilkårlig element fra  $\mathbb{R}^2$ , og sjekke om vi kan finne en vektor  $\mathbf{v} = [x \ y \ z]^T$  i  $\mathbb{R}^3$  slik at  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$ . Det kan vi, ved å for eksempel sette  $\mathbf{v} = [a + 5b \ b \ 0]^T$ . Hvert av disse tre argumentene beviser at  $T$  er surjektiv.

f) Dette er en lineærtransformasjon. Sjekk at beregningene stemmer. Standardmatrisen  $A$  til lineærtransformasjonen  $T$  er

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kjernen til  $T$  er  $\ker T = \text{Sp}\{[1 \ -1 \ 1 \ -1]\}$ .  $T$  er dermed ikke injektiv. Fra teorem 7.27 ser vi at bildet til  $T$  har dimensjon  $4 - 1 = 3$ . Det er uansett opplagt at  $T$  ikke er surjektiv ettersom første element i hver vektor i bildet til  $T$  må være 0, så det er uansett opplagt at  $\dim \text{im} T \leq 3$ . Det er også klart at kolonne

1, 2 og 3 er lineært uavhengige, for det  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$ . Dermed danner kolonne 1, 2 og 3 basis for  $\text{im} T$  som kan uttrykkes  $\text{im} T = \{[0, a, b, c]^T \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ .

**8.3.** For å sette opp ligningen vi skal løse bruker vi standardmatrisen til  $T$  til å uttrykke  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y \\ -x + 3y \\ 3x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Radreduksjon gir  $x = 5$  og  $y = 3$ . Løsningen er altså  $T([5 \ 3]^T) = [-1 \ 4 \ 9]^T$ .

**8.4.** Se plenumsregning.

**8.5.**

a) Dette er standardbasen 1,  $x$  og  $x^2$ .

Forklaring: Vi ønsker å skrive et vilkårlig andregrads-polynom på formen  $p(x) = p(0)f_1(x) + p'(0)f_2(x) + \frac{p''(0)}{2}f_3(x)$ . Dette er akkurat hva  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = x$  og  $f_3 = x^2$  tilfredstiller: Gitt  $p(x) = a + bx + cx^2$  ser vi at  $p(0) = a$ ,  $p'(0) = b$  og  $\frac{p''(0)}{2} = c$  ved regning; dette er akkurat koeffisientene foran 1,  $x$  og  $x^2$ . Alternativ løsning: For en mer systematisk fremgangsmåte kan du følge metoden som er beskrevet i del b).

b) Vi må finne tre polynom  $e_1(x)$ ,  $e_2(x)$  og  $e_3(x)$  som utgjør en basis slik at et vilkårlig polynom kan skrives på formen  $p(x) = p(0)e_1(x) + p(1)e_2(x) + p(2)e_3(x)$

(da blir koordinatene  $\begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$ ). Dette skjer akkurat

dersom  $e_1(x)$  tilfredstiller

$$e_1(0) = 1 \quad e_1(1) = 0 \quad e_1(2) = 0,$$

$e_2(x)$  tilfredstiller

$$e_2(0) = 0 \quad e_2(1) = 1 \quad e_2(2) = 0,$$

$e_3(x)$  tilfredstiller

$$e_3(0) = 0 \quad e_3(1) = 0 \quad e_3(2) = 1$$

(sett inn i likningen for  $p(x)$  uttrykt ved  $e_i$ 'ene for å se dette).

$e_1$ : Polynomet kan skrives på formen  $a_0 + a_1x + a_2x^2$ , og vi krever – fra likningene for  $e_1$  – ovenfor at

$$a_0 = 1 \quad a_0 + a_1 + a_2 = 0 \quad a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0.$$

Dette er tre likninger med tre ukjente, og vi bruker radreduksjon for å se at løsningen er  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -\frac{3}{2}$  og  $a_2 = \frac{1}{2}$ . Polynomet er derfor  $e_1(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$ . Alternativ løsning:  $e_1(1) = 0$  og  $e_1(2) = 0$  betyr at  $(x - 1)$  og  $(x - 2)$  er faktorer av  $e_1$ . Derfor må  $e_1(x) = a(x - 1)(x - 2)$ . Kravet  $e_1(0) = 1$  gir nå  $1 = a \cdot (-1) \cdot (-2)$  slik at  $a = \frac{1}{2}$ . Derfor er  $e_1(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2)$ . Du kan gange ut for å se at dette er det samme polynomet som vi fant ovenfor.

$e_2$ : Samme fremgangsmåte som for  $e_1$  – med litt forskjellige likninger – gir polynomet  $e_2(x) = 2x - x^2$ .

$e_3$ : Samme fremgangsmåte som for  $e_1$  – med litt forskjellige likninger – gir polynomet  $e_3(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$ .

Vi har nå tre polynom  $e_1$ ,  $e_2$  og  $e_3$  som spanner  $\mathcal{P}_2$  (det er konstruert slik at alle polynom kan skrives  $p(x) = p(0)e_1(x) + p(1)e_2(x) + p(2)e_3(x)$ ). De er da automatisk lineært uavhengige siden  $\dim \mathcal{P}_2 = 3$ .

c) Koordinatene til  $x^2$ :

$$[x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \frac{p''(0)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$[x^2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

d) Husk at en  $3 \times 3$ -matrise er bestemt av hvordan den endrer standardbasen i  $\mathbb{R}^3$ .

$T$ : I koordinatene til standardbasen for  $\mathcal{P}_2$  har vi at  $[1]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_1$ ,  $[x]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_2$  og  $[x^2]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_3$ , hvor  $\mathbf{e}_i$  er den  $i$ -te standardbasen for  $\mathbb{R}^3$ , per definisjon av koordinater til en basis. Fra kommentaren ovenfor må vi ha at  $T[1]_{\mathcal{B}} = [1]_{\mathcal{C}}$ ,  $T[x]_{\mathcal{B}} = [x]_{\mathcal{C}}$ ,  $T[x^2]_{\mathcal{B}} = [x^2]_{\mathcal{C}}$ . Basen  $\mathcal{C}$  er konstruert slik at første koordinat er evaluering i 0, andre koordinat er evaluering i 1 og tredje koordinat er evaluering i 2. Derfor har vi

$$T = [T\mathbf{e}_1 \quad T\mathbf{e}_2 \quad T\mathbf{e}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$S$ : Samme fremgang som for  $T$ . Husk at  $e_1(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$ ,  $e_2(x) = 2x - x^2$  og  $e_3(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$ .

I koordinatene til  $\mathcal{B}$  har vi da at  $[e_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ,

$[e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  og  $[e_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ . Dette gir

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vi sjekker at matrisen gir riktig endring av koordinater for  $x^2$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dette viser at  $S$  endrer koordinatene til  $x^2$  som ønsket. Gjør tilsvarende regning for  $T$ , eller vis at  $T$  og  $S$  er inverser ved å multiplisere de sammen og få  $I_3$ .

## 8.6.

a)

$$[T_\theta] = [T_\theta(\mathbf{e}_1) \quad T_\theta(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

b) Å bruke  $T_\theta$  to ganger svarer til å rotere med en vinkel  $\theta$  to ganger:  $T_\theta \circ T_\theta = T_{2\theta}$ . På matrisform har vi derfor

$$[T_{2\theta}] = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}.$$

Vi kan også regne ut dette produktet direkte:

$$[T_\theta]^2 = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix}.$$

Fra element  $(1, 1)$ , eller  $(2, 2)$ , ser vi at  $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ .

**8.7.** Poenget med denne oppgaven er å se noen større sammenhenger i lineær algebra. Det er mange måter å vise disse sammenhengene, og det er viktig at implikasjonene går i begge retninger for hvert av punktene.

(I) **a)  $\Leftrightarrow$  f).** Per definisjon i kapittel 8 om isomorfier er  $T$  en isomorfi hvis og bare hvis det finnes en invers  $S: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  slik at  $T \circ S = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$  og  $S \circ T = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$ . La  $B$  være standardmatrisen til  $S$ . Fordi standardmatrisen til  $\text{id}_{\mathbb{C}^n}$  er  $I_n$  får vi

$$AB = I_n = BA.$$

Det betyr at  $B$  må være den inverse matrisen  $A^{-1}$  til  $A$ .

Og omvendt, dersom  $A$  er inverterbar, så definerer  $A^{-1}$  en lineærtransformasjon  $S: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  som er invers til  $T$ .

(II) **a)  $\Leftrightarrow$  b).** Dette følger fra teorem 6.12. Se bevis i notatene. Merk at dette beviset kun er gyldig for  $A$  en  $n \times n$  matrise, og ikke generelt.

(III) **b)  $\Leftrightarrow$  c).** Dette følger fra teorem 5.14. Se bevis i notatene.

(IV) **b)  $\Leftrightarrow$  d).** Dette følger fra teorem 8.14.2. Bevis:

La  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  være kolonnene i  $A$ , og anta at er lineært uavhengige. Se på ligningssystemet  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Husk at  $A\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \cdot \mathbf{a}_n$ . Ettersom kolonnene er lineært uavhengige, så impliserer ligningen

$$A\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

at  $x_1 = \dots = x_n = 0$ . Dette betyr at nullrommet til  $A$  kun består av nullvektoren. Ettersom  $A$  er standardmatrisen til  $T$  så er nullrommet til  $A$  det samme som kjernen til  $T$ . Vi vet så fra teorem 8.9 (se bevis i notatene) at en lineærtransformasjon er injektiv hvis og bare hvis kjernen kun består av nullvektoren. Dermed følger det at  $T$  er injektiv hvis og bare hvis kolonnene i  $A$  er lineært uavhengige.

(V) **c)  $\Leftrightarrow$  e).** Dette er resultatet i teorem 8.14.1. Bevis:

(i) **c)  $\Rightarrow$  e).** La  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  være kolonnene i  $A$ , og anta at de spenner ut hele  $\mathbb{C}^n$ . La så  $\mathbf{u}$  være et vilkårlig element i  $\mathbb{C}^n$ . Fordi kolonnene i  $A$  spenner ut hele  $\mathbb{C}^n$ , så vet vi at ethvert element i  $\mathbb{C}^n$  kan skrives som en lineærkombinasjon av kolonnene i  $A$ . Da må det eksistere skalarer  $c_1, c_2, \dots, c_n$  i  $\mathbb{C}^n$ , hvor ikke alle er lik null, slik at  $c_1 \cdot \mathbf{a}_1 + c_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + c_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{u}$ . Det betyr at

$$c_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{a}_n = A\mathbf{c} = \mathbf{u}$$

der vi skriver  $\mathbf{c}$  for kolonnevektoren med koordinatene  $c_1, \dots, c_n$ . Fordi  $A$  er standardmatrisen til  $T$ , har vi  $A\mathbf{c} = T(\mathbf{c})$ . Da har vi vist at  $T$  kan nå alle elementer i  $\mathbb{C}^n$ , og dermed er  $T$  surjektiv.

(ii) **c)  $\Leftarrow$  e).** La  $T$  være surjektiv. Da har vi at  $T$  kan nå alle elementer i  $\mathbb{C}^n$ . Det betyr at hvis  $\mathbf{w}$  er en vektor i  $\mathbb{C}^n$ , så finnes det en vektor  $\mathbf{u}$  med  $T(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$ . Ettersom  $A$  er standardmatrisen til  $T$  så betyr dette at  $A\mathbf{u} = \mathbf{w}$ . Vi kan skrive dette igjen som

$$A\mathbf{u} = u_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + u_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{w}$$

der  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  er kolonnene i  $A$  og  $u_1, \dots, u_n$  er koordinatene i  $\mathbf{u}$ . Dette betyr at kolonnene til  $A$  spenner ut hele  $\mathbb{C}^n$ .

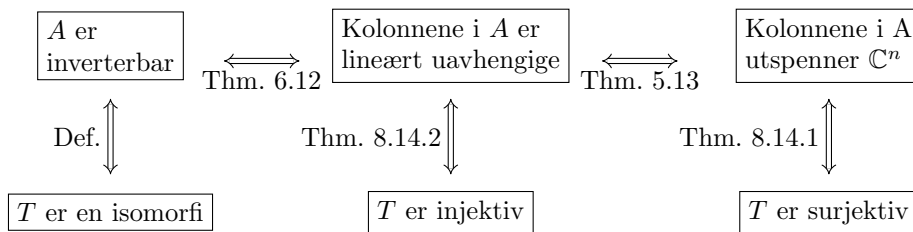
Vi har dermed vist at alle påstandene er ekvivalente. Merk at en lineærtransformasjon  $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  er injektiv hvis og bare hvis  $T$  er surjektiv ettersom definisjonsområdet og verdiområdet har samme dimensjon. Se figur på neste side for en oversikt over sammenhengene.

## 8.8.

**a)**  $T$  må være injektiv, og  $S$  må være surjektiv. Merk at dette ikke egentlig bruker den lineære strukturen, men er sant for generelle funksjoner: Dersom  $f \circ g$  er bijektiv må  $g$  være injektiv og  $f$  surjektiv.

**b)** Vi får at  $\dim U = \dim W$  siden  $U \cong W$ , og  $\dim V \geq \dim U$  siden  $T$  er injektiv (eller  $\dim V \geq \dim W$  siden  $S$  er surjektiv). Det finnes mange ulike bevis for denne ulikheten. Man kan for eksempel bruke teorem 7.27 på en matrise som representerer  $T$  (eller  $S$ ).

Intuitivt gir det kanskje mening at dersom vi går fra et lite rom til et stort rom, så kan vi ikke treffe alle elementene. I tillegg, dersom vi går fra et stort



Figur 0.1: Sammenhengene mellom bevis av påstander i oppgave 8.7.

rom til et lite rom så vil vi nødvendigvis treffe noen elementer flere ganger.

## Eksamensoppgave

Vår 2011: Oppgave 5