# Løsningsforslag øving 7

**9.1.** Vi beregner de 3 indreproduktene og ser at

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er en ortogonal mengde. Alle ortogonale mengder er lineært uavhengige (T. 9.13). Siden vi her har tre lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^3$ er de en basis for $\mathbb{R}^3$.

Når vi vet at vi har en ortogonal basis, vet vi at en vektor $v \in \mathbb{R}^3$ kan skrives slik:

$$v = \frac{\langle v, \mathbf{b}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle}\mathbf{b}_2 + \frac{\langle v, \mathbf{b}_2 \rangle}{\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle}\mathbf{b}_2 + \frac{\langle v, \mathbf{b}_3 \rangle}{\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_3 \rangle}\mathbf{b}_3$$

Koeffisientene til vektoren $(1, 1, 1)$ med hensyn på basisen $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ blir altså $(1/3, 2/3, 0)$.

**9.2.** Det ortogonale komplementet til dette underrommet er alle vektorer som er ortogonale på de to vektorene. Det vil si, alle vektorer slik at prikkproduktet med de to gitte vektorene blir 0. Ettersom vi er gitt to vektorer i $\mathbb{R}^3$ så kan komplementet spennes ut av en vektor. Vi kan enkelt prøve oss frem for å finne en slik vektor på formen $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a + c = 0.$$

og

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = -a + 2c = 0.$$

Her ser vi fra første ligning at $a = -c$. Men i andre ligning ser vi at $a = 2c$. Den eneste løsningen på de to ligningene er at $a = c = 0$. Derimot kan $b$ være hva som helst. Det ortogonale komplementet er dermed et underrom som spennens ut av vektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

**9.3.**

**a)** Den ortogonale projeksjonen er:

$$P_{\mathbf{v}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

**b)** Kolonnene til standardmatrisen $[P_{\mathbf{v}}]$ består av prosjeksjonen til standardbasisen i $\mathbb{R}^3$. Vi regner ut:

$$P_{\mathbf{v}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

og

$$P_{\mathbf{v}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{3}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi får at:

$$[P_{\mathbf{v}}] = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

**c)** Matrisen er ikke injektiv fordi alle vektorer som står ortogonalt på $\mathbf{v}$ vil sendes til nullvektoren, og dermed består nullrommet til $[P_{\mathbf{v}}]$ av mer enn bare nullvektoren selv.

Matrisen er ikke surjektiv fordi den kun spenner ut linjen som spennes ut av vektoren $\mathbf{v}$ selv.

**d)** Fra oppgave c så vet vi at $\operatorname{im} P_{\mathbf{v}} = \operatorname{Sp} \mathbf{v}$. Denne har dimensjon lik 1. Vi vet at $\operatorname{im} P_{\mathbf{v}} = \operatorname{Col}[P_{\mathbf{v}}]$ fordi $[P_{\mathbf{v}}]$ er standardmatrisen til $P_{\mathbf{v}}$. Dermed har begge dimensjon lik 1.

Fra Teorem 9.20 har vi at det ortogonale komplementet til ei linje i $\mathbb{R}^3$ er todimensjonalt. $\ker P_{\mathbf{v}}$ e3 nettopp det ortogonale komplementet til $\operatorname{Sp} \mathbf{v}$ og er altså 2-dimensjonalt. Nullrommet til $[P_v]$ er lik kjernen til $P_v$.