Kapittel 1

Komplekse tall

Oppfinnelsen av nye tallsystemer henger gjerne sammen med løsning av polynomligninger. Ligningen

$$2x + 4 = 0$$

har ingen positiv løsning, selv om koeffisientene er positive tall. Ligningen

$$2x - 3 = 0$$

har ingen heltallig løsning, selv om koeffisientente er hele tall. Ligningen

$$x^2 - 2 = 0$$

har ingen rasjonale løsninger, siden

$$x = \sqrt{2}$$

ikke kan skrives som en brøk.

Generelt er det slik at en polynomlikning

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

ikke nødvendigvis har en løsning i det tallsystemet koeffisientene er hentet fra. Man kan spørre seg hvorvidt det finnes tallsystemer der en vilkårlig polynomlikning alltid har løsning, og svaret er ja. Vi skal ta for oss et slikt tallsystem, nemlig de *komplekse tallene.*

Den imaginære enheten

For å komme igang med komplekse tall, kan vi betrakte ligningen

$$x^2 + 1 = 0.$$

På gymnaset ville du sagt at denne ligningen ikke har noen løsning, for det finnes ingen relle tall som passer i ligningen.

Derfor finner vi opp et nytt tall. Vi kaller det i, den *den imaginære enheten.* Nå kan det være fristende å 'løse' likningen over for x, og definere

$$i = \sqrt{-1}.$$

Med dette nye tallet kan vi skrive kvadratroten av negative tall på en pen måte:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{(-1)} = 2i.$$

Men vi må være litt forsiktige med denne strategien. Regneregelen

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

gjelder nemlig ikke når a og b er negative tall. Følgende klassiske eksempel er litt artig:

$$\begin{aligned} 1 &= (-1) \cdot (-1) \\ &= \sqrt{(-1) \cdot (-1)} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i^2 = -1. \end{aligned}$$

Med andre ord må vi være litt forsiktige med å sjonglere med negative tall og rottegn. En god strategi er å definere i ved ligningen

$$i^2 = -1,$$

for dette er egenskapen vi er ute etter. Skulle vi slumpe til å ta roten av et negativt tall, forter vi oss bare med å skrive det ved hjelp av den imaginære enheten, slik at vi ikke blir forledet til å utføre noen ulovlige regneoperasjoner.

Eksempel 1.1. Løser vi likningen

$$x^2 + x + 1 = 0$$

gir annengradsformelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

at

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i. \qquad \triangle$$

Eksemplet over inspirerer oss til å definere *komplekse tall* som

$$z = a + bi.$$

Her er a og b reelle tall. De kalles henholdsvis *realdelen* og *imaginærdelen* til z, og skrives gjerne $\operatorname{Re} z$ og $\operatorname{Im} z$. Mengden av alle komplekse tall skrives $\mathbb{C}$. De reelle tallene er en delmengde av de komplekse tallene,for dersom $b = 0$, er z reell.

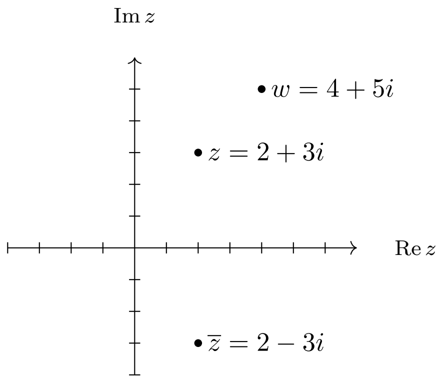
Et komplekst tall har en viss ytre likhet med vektorer i $\mathbb{R}^2$. Hvis komponentene til $\mathbf{x}$ er x_1 og x_2, og enhetsvektorer i koordinatretningene er

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

skriver vi gjerne

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2.$$

På lignende vis kan vi tenke at realdelen a og imaginærdelen b er komponenter i en vektor, og avmerke z i *det komplekse planet.*



Det komplekse planet

Operasjoner på komplekse tall

Regneregler for komplekse tall følger regnereglene for reelle tall, men du må huske at $i^2 = -1$.

> **Teorem 1.2.** *La $z = a + bi$ og $w = c + di$ være komplekse tall. Vi har*
>
> $$z + w = a + c + (b + d)i$$
> $$z - w = a - c + (b - d)i$$
> $$z \cdot w = ac - bd + (bc + ad)i$$
> $$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Bevis. De to første er trivielle. Vi beviser gangeregelen:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= ac - bd + (bc + ad)i \end{aligned}$$

og deleregelen:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} \\ &= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$ □

Komplekse tall legges altså sammen komponentvis akkurat som vektorer i $\mathbb{R}^2$, mens multiplikasjon og divisjon har ingen tilsvarende operasjoner i $\mathbb{R}^2$.

Eksempel 1.3. La $z = 2 + 3i$ og $w = 4 + 5i$.

$$z + w = 2 + 4 + (3 + 5)i = 6 + 8i$$

$$z - w = 2 - 4 + (3 - 5)i = -2 - 2i$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (2 + 3i) \cdot (4 + 5i) \\ &= 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4i + 2 \cdot 5i + 3 \cdot 5i^2 \\ &= 8 - 15 + (12 + 10)i = -7 + 22i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{2 + 3i}{4 + 5i} \cdot \frac{4 - 5i}{4 - 5i} \\ &= \frac{8 + 15 + (12 - 10)i}{16 + 25} = \frac{22}{41} - \frac{2}{41}i. \end{aligned}$$ △

Når vi deler et komplekst tall på $z = a + bi$, ganger vi oppe og nede med w *konjugert*

$$\overline{z} = a - bi.$$

Merk at $z\overline{z} = a^2 + b^2$ er et reelt tall. Her er et par regneregler for konjugering.

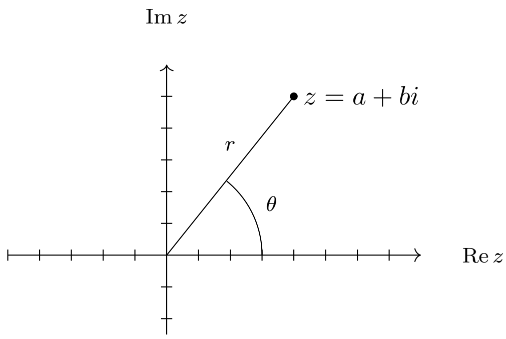
> **Teorem 1.4.** *La $z = a + bi$ og w være komplekse tall. Noen regneregler er:*
>
> $$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$$
> $$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \qquad \overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$$
> $$z + \overline{z} = 2a \qquad z - \overline{z} = 2bi$$

Bevisene blir gitt i øvingsopplegget.

Polare koordinater

La r være avstanden fra det komplekse tallet $z = a + bi$ til origo, og la θ være vinkelen z gjør med den reelle aksen. Noen enkle geometriske betraktninger gir oss at

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{Re} z = r\cos\theta \\ b &= \operatorname{Im} z = r\sin\theta. \end{aligned}$$



Polare koordinater

Formlene over gir a og b som funksjon av r og θ. Litt mer trigonometri gir den andre veien:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{for } a > 0 \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi & \text{for } a < 0 \\ \pi/2 & \text{for } a = 0,\ b > 0 \\ 3\pi/2 & \text{for } a = 0,\ b < 0 \end{cases}$$

Arkustangensfunksjonen skjønner ikke av seg selv om z ligger til høyre eller venstre for den imaginære aksen, og er z imaginær blir den ihvertfall forvirret. Derav alle tilfellene. Merk også at vi kan legge til vilkårlige multipler av 2π overalt, samt at for $z = 0$ er ikke θ definert.

Vi skriver ellers

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

for avstanden fra z til origo. Dette tallet kalles gjerne *absoluttverdi* eller *modulus* til z. Vinkelen

$$\theta = \arg z$$

kalles *vinkelen* eller *argumentet* til z. Følgende ulikhet, populært kalt *trekantulikheten*, er også bevist i øvingsopplegget.

Teorem 1.5. *La z og w være komplekse tall. Da gjelder at*

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

Eulers formel

Fra envariabel kalkulus husker du kanskje taylorrekkene til eksponensialfunksjonen:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

sinusfunksjonen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

og cosinusfunksjonen:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Dersom bruker den imaginære enheten i til å skrive

$$\cos x = 1 + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}$$

og

$$i \sin x = ix + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

og legger disse to sammen, får vi

$$\cos x + i \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = e^{ix}.$$

Dette er kun en symbolsk manipulasjon, vi vet strengt tatt ikke hva som skjer med konvergensen til en taylorrekke når du ganger den med i. Men beregningen inspirerer oss til å definere

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Formelen kalles *Eulers formel.* At vi er inne på noe, kan vi få bekreftet ved å observere at vanlige regneregler for eksponensialfunksjonen er lette å utlede fra denne formelen.

Teorem 1.6. *La $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Da er*

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

Bevis.

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ &\quad + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y) \\ &= (\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y) = e^{ix} e^{iy} \; \square \end{aligned}$$

Med Eulers formel kan vi skrive komplekse tall veldig kompakt på *polar form*:

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}.$$

Skrivemåten $z = a + bi$ kalles gjerne *kartesisk form.* Her er noen regneregler for polar form.

Teorem 1.7. *La $z = re^{i\theta}$ og $w = se^{i\alpha}$. Da gjelder:*

$$z \cdot w = rse^{i(\theta+\alpha)}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} e^{i(\theta-\alpha)}$$

Eksempel 1.8. Polar form er praktisk når man skal gange og dele komplekse tall. La $z = 1 + i$ og $w = 1 + \sqrt{3}i$, slik at

$$z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

og

$$w = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Vi beregner

$$z \cdot w = 2\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

og

$$\frac{z}{w} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{-\pi}{12}}.$$

△

Eksempel 1.9. Eulers formel gir at $e^{\pi i/2} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{3\pi i/2} = -i$ og $e^{2\pi i} = 1$. △

Eksempel 1.10. Dersom $z = re^{i\theta}$ gir Eulers formel $\overline{z} = re^{-i\theta}$. △

Røtter av komplekse tall

Hvis du plukker opp en tilfeldig bok i algebra eller kompleks analyse, er det bevist følgende teorem et eller annet sted. Teoremet heter algebraens fundamentalteorem.

Teorem 1.11. *Et polynom*

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

kan alltid faktoriseres

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i),$$

der $z_i \in \mathbb{C}$ er løsninger av likningen

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

Merk. I teoremet over er $a_n = 1$. Det er for å slippe å luke ut tilfellet $a_n = 0$. Dersom $a_n \neq 0$, og noe annet enn 1, blir faktoriseringen

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - z_i).$$

Dersom en faktor $(z - z_k)$ forekommer m ganger i faktoriseringen, sier vi at z_k har *multiplisitet* m.

Eksempel 1.12. Polynomet

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = (z-1)^3$$

har en rot $(z = 1)$ med multiplisitet 3. △

Eksempel 1.13. Polynomet

$$z^2 - 2z + 2$$

har to røtter

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i,$$

begge med multiplisitet 1, slik at

$$z^2 - 2z + 2 = (z - 1 - i)(z - 1 + i). \qquad \triangle$$

Vi skal ikke bevise algebraens fundamentalteorem, men et spesialtilfelle kan vi analysere med det vi kjenner til så langt, nemlig løsninger av polynomlikningen

$$z^n = w$$

for et vilkårlig komplekst tall w. Vi skal se med egne øyne at denne likningen alltid har n løsninger. Vi begynner med å skrive w på polar form med valgfritt antall omdreininger rundt origo

$$w = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2m\pi)}.$$

Dersom vi skriver

$$w^{1/n} = (re^{i(\theta+2m\pi)})^{1/n} = \sqrt[n]{r}e^{i(\theta/n+2m\pi/n)},$$

ser vi at det nå finnes n potensielle verdier for $\sqrt[n]{w}$, alle sammen gyldige løsninger av $z^n = w$. Hvis du velger $0 \leq m \leq n-1$ får du ut alle sammen. Vi definerer den prinsipale n-te roten av w som

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r}e^{i\theta/n},$$

og så kan vi skrive de andre røttene som

$$\sqrt[n]{w} \cdot e^{2m\pi i/n}$$

for $1 \leq m \leq n-1$. Dette er analogt til hvordan man i det reelle tilfellet har to løsninger av ligningen

$$x^2 = 4,$$

definerer kvadratroten som den positive løsningen

$$\sqrt{4} = 2,$$

og skriver den andre løsningen som $-\sqrt{4}$.

Eksempel 1.14. Vi finner alle løsninger av ligningen

$$z^5 = -1.$$

Siden

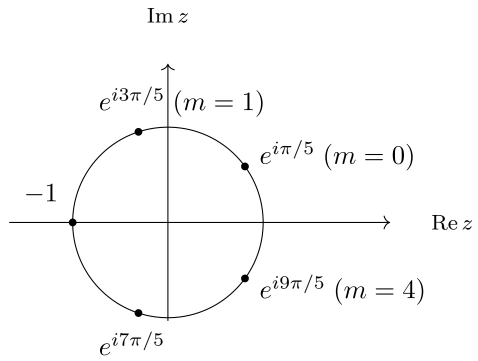
$$-1 = e^{i(\pi+2m\pi)},$$

får vi

$$(-1)^{1/5} = e^{i(\pi/5+2m\pi/5)}.$$

Vi skriver opp løsningene for $0 \leq m \leq 4$:

$e^{i\pi/5}(= \sqrt[5]{-1})$, $e^{i3\pi/5}$, $e^{i5\pi/5}(= -1)$, $e^{i7\pi/5}$ og $e^{i9\pi/5}$



Femterøttene til -1

Merk hvordan røttene sprer seg jevnt ut på en sirkel om origo. Merk også at om vi lar $m > 4$ eller $m < 0$, får vi røtter som allerede er listet opp. △