

Kapittel 11

Diagonalisering

I dette kapittelet skal vi anvende vår kunnskap om egenverdier og egenvektorer til å analysere matriser og deres tilsvarende lineærtransformasjoner.

Eksempel 11.1. Vi begynner med et eksempel og ser på diagonalmatrisen

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Det er lett å multiplisere D med vektorer i \mathbb{R}^2 eller \mathbb{C}^2 . Men det er også enkelt å multiplisere D med seg selv. For eksempel får vi D^5 ved

$$D^5 = D \cdot D \cdot D \cdot D \cdot D = \begin{bmatrix} 3^5 & 0 \\ 0 & (-5)^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 243 & 0 \\ 0 & -3125 \end{bmatrix}.$$

Hvis vi prøver det samme med A , dvs beregne A^5 for

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix},$$

blir det mye mer tidskrevende.

Fordi det er mye lettere å jobbe med en diagonalmatrise, kan vi stille spørsmålet: finnes det en diagonalmatrise D og en inverterbar matrise P slik at

$$A = PDP^{-1}?$$

Da ville oppgaven å beregne A^5 blitt mye enklere:

$$\begin{aligned} A^5 &= (PDP^{-1})^5 \\ &= PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \dots PDP^{-1} \\ &= PD^5P^{-1}, \end{aligned}$$

fordi $P^{-1} \cdot P = I_2$, og D^5 er lett å beregne.

For å finne slike matriser D og P husker vi fra forrige kapittel, at A har egenverdier $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = -5$ med henholdsvis $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ som egenvektorer. Det betyr at vi har

$$A\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_1 \text{ og } A\mathbf{v}_2 = (-5)\mathbf{v}_2.$$

En annen måte å skrive disse to ligningene er å skrive egenverdiene på diagonalen i en matrise D og så skrive egenvektorene som kolonnene i en matrise P :

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ og } P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

slik at

$$AP = PD.$$

Nå observerer vi at P er inverterbar med invers

$$P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Altså kan vi gange begge sidene av $AP = PD$ med P^{-1} og får

$$A = PDP^{-1}.$$

Nå kan vi faktisk beregne A^k for alle k med formelen

$$A^k = PD^kP^{-1}. \quad \triangle$$

Det vi har gjort i eksempelet er å erstatte en matrise A med en diagonalmatrise D , med andre ord har vi diagonalisert A .

Definisjon. Vi sier at en $n \times n$ -matrise A er *diagonaliserbar* hvis det finnes en diagonalmatrise D og en inverterbar matrise P slik at

$$A = PDP^{-1}. \quad \triangle$$

Ikke alle matriser er diagonaliserbare. Derfor trenger vi en metode for å sjekke om vi kan diagonalisere A . Det gir oss følgende resultat:

Teorem 11.2. *En $n \times n$ -matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis A har n lineært uavhengige egenvektorer.*

Bevis. Først antar vi at A har n lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ og tilhørende egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. For hver egenvektor gjelder

$$A\mathbf{v}_k = \lambda_k\mathbf{v}_k.$$

Som i eksempelet kan vi organisere disse n ligningene i en matriSELIGNING

$$AP = PD,$$

der

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

og

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n].$$

Siden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige, er $n \times n$ -matrisen P inverterbar. Det betyr det finnes en invers P^{-1} og vi får

$$A = PDP^{-1}.$$

Med andre ord A er diagonaliserbar.

Nå antar vi at A er diagonaliserbar med $A = PDP^{-1}$ der D er en diagonalmatrise og P er en inverterbar matrise. La $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ være kolonnene i P og $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ være tallene som står på diagonalen i D . Ligningen $A = PDP^{-1}$ gir oss en likhet av matriser

$$[A\mathbf{v}_1 \ A\mathbf{v}_2 \ \dots \ A\mathbf{v}_n] = [\lambda_1\mathbf{v}_1 \ \lambda_2\mathbf{v}_2 \ \dots \ \lambda_n\mathbf{v}_n].$$

Det viser at

$$A\mathbf{v}_k = \lambda_k\mathbf{v}_k \text{ for alle } k.$$

Fordi P er inverterbar, må vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ være lineært uavhengige. Især er alle forskjellige fra nullvektoren. Det viser at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige egenvektorer for A . \square

Vi fant i forrige kapittel at egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier er lineært uavhengige. Sammen med teorem 11.2 gir det:

Teorem 11.3. Hvis en $n \times n$ -matrise A har n forskjellige egenverdier, så er A diagonaliserbar.

Hvis noen av egenverdiene for A har algebraisk multiplisitet større enn 1, er det fortsatt mulig at A er diagonaliserbar. Det vi må undersøke er om det er mange nok lineært uavhengige egenvektorer allikevel.

Teorem 11.4. En $n \times n$ -matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis A har n egenverdier og dimensjonen til egenrommet til hver egenverdi λ er lik den algebraiske multiplisiteten til λ .

Merk. La A være en reell $n \times n$ -matrise. Det er mulig at A er diagonaliserbar som en kompleks matrise, selv om den ikke er diagonaliserbar som en reell matrise. Om A har kun komplekse egenverdier, kan vi ikke finne en passende reell diagonalmatrise. Det er også mulig at egenverdiene er reelle, mens de tilhørende n lineært uavhengige egenvektorene ligger i \mathbb{C}^n og ikke i \mathbb{R}^n . Da kan vi ikke finne en passende inverterbar reell matrise P , selv om P eksisterer som en kompleks matrise. \triangle

Vi kan reformulere dette ved hjelp av basiser.

Teorem 11.5. En kompleks $n \times n$ -matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis det finnes en basis for \mathbb{C}^n som består kun av egenvektorer for A .

En reell $n \times n$ -matrise A er diagonaliserbar som en reell matrise hvis og bare hvis det finnes en basis for \mathbb{R}^n som består kun av egenvektorer for A .

Dette resultatet motiverer følgende definisjon:

Definisjon. En lineærtransformasjon $T: V \rightarrow V$ kalles diagonaliserbar hvis det finnes en basis for V som består kun av egenvektorer for T . \triangle

Da kan vi konkludere det følgende resultatet fra tidligere teoremer og kapitler:

Teorem 11.6. La $T: V \rightarrow V$ være en lineærtransformasjon. Vi antar at T er diagonaliserbar og $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ er en basis som består av T sine egenvektorer. Da er matrisen som beskriver T med hensyn på basisen \mathcal{B} en diagonalmatrise D med egenverdiene $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ til T på diagonalen.

Eksempler

Vi skal nå se på en rekke eksempler.

Eksempel 11.7. Vi har sett på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 12 & 4 & -6 \\ -20 & 0 & 14 \end{bmatrix},$$

og vet at egenverdiene for A er 2 og 4 (med algebraisk multiplisitet 2). Egenrommet til egenverdi 2 er

$$\text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

Egenrommet til egenverdi 4 er

$$\text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vi ser at vi har tre lineært uavhengige egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Det betyr at A er diagonaliserbar med diagonalmatrisen

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

og inverterbar matrise

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

Eksempel 11.8. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

har egenverdier

$$\lambda = \pm i$$

med egenrom $\text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ til egenverdi i , og egenrom

$\text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\}$ til egenverdi $-i$.

Det betyr at A er diagonaliserbar som en kompleks matrise med diagonalmatrise

$$D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

og inverterbar matrise

$$P = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$

Men vi kan ikke diagonalisere A som en reell matrise. \triangle

Eksempel 11.9. Vi ser på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eigenverdien til A er 1 med algebraisk multiplisitet 2 fordi

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right) = (1-\lambda)^2.$$

Egenrommet til 1 er nullrommet til matrisen

$$A - I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det er underrommet utspent av vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Især er egenrommet endimensjonalt. Vi kan altså ikke finne to lineært uavhengige egenvektorer for A . Dette viser at A ikke er diagonaliserbar, hverken som reell eller kompleks matrise. \triangle

Eksempel 11.10. Det samme argumentet viser at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ikke er diagonaliserbar, hverken som reell eller kompleks matrise. \triangle

Opgave: Vi ser på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

For hvilke reelle tall a og b er A diagonaliserbar?

Mer om komplekse eigenverdier

Når en reell $n \times n$ -matrise A har komplekse eigenverdier er det på første øyekast ikke lenger så enkelt å se geometrisk hva virkningen av A på vektorer i \mathbb{R}^n er. Vi skal nå se at det ligger ganske mye geometri i bakgrunnen allikevel, i hvert fall for 2×2 -matriser.

La C være matrisen

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

med reelle tall a og $b \neq 0$. Vi kan beregne eigenverdiene for C eller vi kan observere at

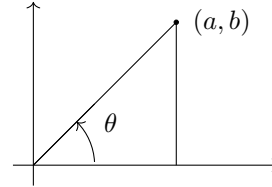
$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - bi \\ b + ai \end{bmatrix} = (a - bi) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Altså er $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ en egenvektor til C med eigenverdi $\lambda = a - bi$. Fordi $b \neq 0$, vet vi at $\bar{\lambda} = a + bi$ er den andre eigenverdien til C med egenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$.

Hvis vi skriver $r = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$ for lengden av vektoren $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ i \mathbb{R}^2 , så kan vi skrive

$$C = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

der θ er vinkelen mellom den positive x -aksen og linjen fra origo til punktet med koordinater (a, b) .



Å gange en vektor \mathbf{v} i \mathbb{R}^2 med matrisen $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$ tilsvarer at vi ganger vektoren med tallet r , med andre ord, vi strekker eller krymper \mathbf{v} med faktoren r . Å gange en vektor \mathbf{v} i \mathbb{R}^2 med matrisen $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ tilsvarer å rotere \mathbf{v} om vinkelen θ .

Altså har vi vist at å gange en vektor \mathbf{v} i \mathbb{R}^2 med matrisen C tilsvarer å strekke og rotere \mathbf{v} .

Observasjonen er at å gange med matrisen C tilsvarer en rotasjon og en re-skalerting faktisk også gjelder for andre matriser med komplekse eigenverdier.

Teorem 11.11. La A være en reell 2×2 -matrise med kompleks eigenverdi $\lambda = a - bi$, med $b \neq 0$, og la $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ være en egenvektor som hører til λ . Da kan vi faktorisere A på følgende måte:

$$A = PCP^{-1} \text{ med } P = [\operatorname{Re} \mathbf{v} \quad \operatorname{Im} \mathbf{v}] \text{ og } C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Teoremet sier at for å forstå virkningen av A på en vektor \mathbf{x} , kan vi skifte koordinater ved P^{-1} for å få $\mathbf{u} = P^{-1}\mathbf{x}$, rotere og strekke vektoren \mathbf{u} ved C , og så skifte koordinatene tilbake.

Eksempel 11.12. La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi finner eigenverdiene til A :

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \iff (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 &= 0 \\ \iff \lambda^2 - 4\lambda + 5 &= 0 \\ \iff (\lambda - 2)^2 + 1 &= 0 \\ \iff \lambda = 2 + i \text{ eller } \lambda = 2 - i. \end{aligned}$$

Vi finner egenvektorer som hører til eigenverdien $\lambda = 2 - i$. Da må vi bestemme nullrommet til matrisen $A - \lambda I_2$:

$$A - (2 - i)I_2 = \begin{bmatrix} -1 - i & -2 \\ 1 & 1 + i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 + i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette viser at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 + i \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A som hører til eigenverdien $\lambda = 2 - i$.

Som i teoremet får vi $A = PCP^{-1}$ med matrisene

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

og

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

Symmetriske matriser

Definisjon. En reell matrise kalles *symmetrisk* dersom $A = A^T$. \triangle

Eksempel 11.13. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ -5 & 2 & -13 \\ 7 & -13 & 3 \end{bmatrix}$$

er symmetrisk. \triangle

En reell 2×2 -matrise A er symmetrisk hvis den har formen

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Vi sjekker om denne matrisen er diagonaliserbar. Vi beregner egenverdiene:

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \iff (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 &= 0 \\ \iff \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 &= 0 \\ \iff \lambda &= \frac{\pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} + a + c}{2}. \end{aligned}$$

Fordi $(a-c)^2 + 4b^2$ er et positivt reelt tall, ser vi at A har to *reelle* egenverdier.

Hvis $(a-c)^2 + 4b^2 \neq 0$, så er egenverdiene forskjellige. Det betyr at 2×2 -matrisen A har to *forskjellige* egenverdier og er dermed diagonaliserbar. Hvis $(a-c)^2 + 4b^2 = 0$, så må vi ha $a-c=0$ og $b=0$, altså er $A = a \cdot I_2$ en diagonalmatrise med egenrom hele \mathbb{R}^2 .

Vi ser altså at en symmetrisk 2×2 -matrise alltid er diagonaliserbar. Faktisk holder det vi nettopp fant ut i alle dimensjoner:

Teorem 11.14. *La A være en symmetrisk $n \times n$ -matrise. Da har A n reelle egenverdier (talt med multiplisitet) og A er diagonaliserbar (som en reell matrise).*

Merk. Dette teoremet er fantastisk fordi for en vanlig $n \times n$ -matrise er det nesten umulig å se med en gang om den er diagonaliserbar. Men for symmetriske matriser er det lett å se. \triangle

Oppgave: Sjekk om matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

er diagonaliserbar. Hvis den er diagonaliserbar, finn den tilsvarende diagonalmatrisen D og inverterbare matrise P slik at $A = PDP^{-1}$.

Eksempel 11.15. Vi ser på matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Vi beregner egenverdiene:

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 6-\lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \iff (1-\lambda)((6-\lambda)^2 - 4) & - 2(2(6-\lambda) - 4) + 2(4 - 2(6-\lambda)) = 0 \\ \iff \lambda^3 - 13\lambda^2 + 36\lambda &= 0 \\ \iff \lambda(\lambda-4)(\lambda-9) &= 0. \end{aligned}$$

Det viser at egenverdiene for B er 0, 4 og 9. Egenvektorer er henholdsvis

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Altså får vi $B = PDP^{-1}$ med diagonalmatrise

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

og inverterbar matrise

$$P = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

\triangle

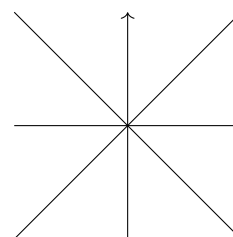
Merk. Det forrige eksempelet minner oss om at en matrise kan være diagonaliserbar uten å være inverterbar. \triangle

Symmetri og ortogonalitet

Tidligere så jobbet vi med ortogonalitet. Se litt nærmere på oppgaven og eksempelet vi nettopp studerte:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorene $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ til A utspenner underrom i \mathbb{R}^2 som ligger ortogonalt på hverandre:



Ortogonale egenrom for A

Vi husker at vi kan sjekke om to vektorer i \mathbb{R}^2 er ortogonale ved å sjekke at deres indreprodukt er null:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{u}_2 &= [1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$

Det samme fenomenet observerer vi for egenrommene for B . Egenvektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er ortogonale til hverandre:

$$\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 = [-4 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 + 1 - 1 = 0,$$

$$\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_3 = [-4 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 + 2 + 2 = 0,$$

$$\mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{v}_3 = [0 \quad 1 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 + 2 - 2 = 0.$$

Faktisk er det alltid slik for symmetriske matriser:

Teorem 11.16. *La A være en symmetrisk $n \times n$ -matrise. Egenvektorene til A tilhørende to distinkte egenverdier er ortogonale.*

Bevis. La \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 være to egenvektorer som hører til egenverdier henholdsvis λ_1 og λ_2 . Vi beregner

$$\begin{aligned}\lambda_1 \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 &= (\lambda_1 \mathbf{v}_1)^T \cdot \mathbf{v}_2 = (A\mathbf{v}_1)^T \cdot \mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{v}_1^T \cdot A^T \cdot \mathbf{v}_2 \\ &\text{(nå bruker vi at } A \text{ er symmetrisk: } A = A^T) \\ &= \mathbf{v}_1^T \cdot A \cdot \mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{v}_1^T \cdot (A \cdot \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1^T \cdot (\lambda_2 \mathbf{v}_2) \\ &= \lambda_2 \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2.\end{aligned}$$

Vi vet altså at

$$0 = \lambda_1 \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 - \lambda_2 \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2.$$

Nå bruker vi at λ_1 og λ_2 er forskjellige, og får

$$\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 = 0. \quad \square$$

Definisjon. En $n \times n$ -matrise er *ortogonalt diagonaliserbar* dersom den har n ortogonale egenvektorer.

For en symmetrisk $n \times n$ -matrise har vi vist at egenvektorene til forskjellige egenverdier er ortogonale til hverandre. Videre har vi at:

Teorem 11.17. *En reell $n \times n$ -matrise er ortogonalt diagonaliserbar hvis og bare hvis den er symmetrisk.*

For $n \times n$ -matriser med *komplekse* elementer trengs det en liten tilpasning for å få lignende resultater.

La A være en $n \times n$ -matrise med $a_{ij} \in \mathbb{C}$ som element i rad i og kolonne j . Da skriver vi A^* for matrisen

$$A^* = \overline{A^T},$$

dvs. vi transponerer A og så komplekskonjugerer vi resultatet. Med andre ord, elementet i A^* i rad i og kolonne j er $\overline{a_{ji}}$.

Definisjon. En $n \times n$ -matrise A kalles *hermitsk* hvis

$$A = A^*.$$

△

Merk. I en hermitsk matrise A må elemente på diagonalen være reelle tall fordi de oppfyller $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$.

Dessuten er en reell matrise hermitsk hvis og bare hvis den er symmetrisk. △

Til slutt har vi at:

Teorem 11.18. *En hermitsk $n \times n$ -matrise har n reelle egenverdier (talt med multiplisitet) og er ortogonalt diagonaliserbar.*