Kapittel 13

Systemer av differensialligninger

I dette kapitlet skal vi bruke det vi har lært om lineær algebra til å studere systemer av differensialligninger.

Vektorfunksjoner

En *vektorfunksjon* er en funksjon $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$:

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

der alle komponentene er funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{C}$. Mengden av alle vektorfunksjoner utgjør et vektorrom med uendelig mange dimensjoner.

Eksempel 13.1. Funksjonen

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

tegner enhetssirkelen i $\mathbb{R}^2$. △

Eksempel 13.2. Funksjonen

$$\mathbf{f}(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

tegner enhetssirkelen i det komplekse planet $\mathbb{C}$. △

Eksempel 13.3. Funksjonen

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix} \qquad 0 \leq t$$

tegner en oppadgående spiral i $\mathbb{R}^3$. Den starter i origo, og er uendelig lang. △

Eksempel 13.4. Funksjonen

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t \qquad t \in \mathbb{R}$$

tegner en den rette linjen utspent av vektoren

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^2$. △

Eksempel 13.5. Funksjonen

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \qquad t \in \mathbb{R}$$

tegner den delen av linjen i forrige eksempel som ligger i første kvadrant i $\mathbb{R}^2$. △

Definisjon. Vi definerer den deriverte av $\mathbf{f}$ som

$$\mathbf{f}'(t) = \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{bmatrix}.$$

I to og tre dimensjoner er $\mathbf{f}'$ tangenten til kurven tegnet av $\mathbf{f}$, mens $\|\mathbf{f}'\|$ forteller deg hvor fort det går. Dersom alle komponentene er kontinuerlig deriverbare og $\mathbf{f}'(t) \neq \mathbf{0}$ for alle t, tegner $\mathbf{f}$ en glatt kurve. Dersom alle komponentene er kontinuerlig deriverbare, sier vi at $\mathbf{f}$ er *kontinuerlig deriverbar*.

Fundamentalsystemer

I dette kapitlet trenger vi at vektorfunksjoner er lineært uavhengige som vektorer for hvert tidspunkt t. Vi tar et par eksempler for å illustrere.

Eksempel 13.6. La

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} t \\ e^{t-1} \end{bmatrix}.$$

For tiden $t = 1$ er

$$\mathbf{f}(1) = \mathbf{g}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

og for alle andre tider er $\mathbf{f}(t)$ og $\mathbf{g}(t)$ ikke en gang parallelle. Med andre ord er $\mathbf{f}(1)$ og $\mathbf{g}(1)$ lineært avhengige, mens $\mathbf{f}(t)$ og $\mathbf{g}(t)$ er lineært uavhengige når $t \neq 1$. △

Eksempel 13.7. La

$$\mathbf{f}(t) = t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = t \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{h}(t) = t \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Siden vektorene

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

er lineært avhengige, er det klart at det er mulig å finne c_1, c_2 og c_3 slik at

$$c_1\mathbf{f}(t) + c_2\mathbf{g}(t) + c_3\mathbf{h}(t) = \mathbf{0}$$

for alle tidspunkt t. I et tidligere kapittel fant vi at

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

og i dette eksemplet er det lett å se at

$$\mathbf{f} - \mathbf{g} + \mathbf{h} = \mathbf{0}. \qquad \triangle$$

Eksempel 13.8. La nå

$$\mathbf{f}(t) = t\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = t\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{h}(t) = e^t\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$$

Det er også helt klart mulig å finne c_1, c_2 og c_3 slik at

$$c_1\mathbf{f}(t) + c_2\mathbf{g}(t) + c_3\mathbf{h}(t) = \mathbf{0}$$

for hvert tidspunkt t, men du må finne nye c_1, c_2 og c_3 for hver t, siden de to første vektorfunksjonene har vekstfaktor t, mens den siste har vekstfaktor e^t. $\triangle$

Det vi kommer til å få bruk for, er følgende: Vektorfunksjonene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ må for hver verdi av t utgjøre en basis for $\mathbb{R}^n$. Det er derfor naturlig å sette de n vektorfunksjonene opp som kolonner i en $n \times n$-matrise $\mathbf{Y}$, og kreve at $\det \mathbf{Y}(t) \neq 0$ for alle t. En slik vektormengde kalles et *fundamentalsystem* eller en *fundamentalmengde*, og matrisen $\mathbf{Y}$ kalles *fundamentalmatrisen*. Merk at siden vektorene i et fundamentalsystem er lineært uavhengige som vektorer for hver t; er de også lineært uavhengige som vektorfunksjoner.

Eksempel 13.9. Vektorfunksjonene

$$\mathbf{f}(t) = e^t\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = e^t\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{h}(t) = e^t\begin{bmatrix}4\\5\\7\end{bmatrix}$$

kan settes sammen til fundamentalmatrisen

$$\mathbf{Y}(t) = e^t\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\3 & 4 & 5\\4 & 5 & 7\end{bmatrix},$$

og siden $\det \mathbf{Y}(t) = -e^t \neq 0$ for alle t, utgjør de et fundamentalsystem. Altså danner de for hver t en basis for $\mathbb{R}^3$. $\triangle$

Systemer av differensiallikninger

I dette kapitlet skal

$$A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

alltid være en reell matrise. Det blir mer enn komplisert nok. Et *førsteordens lineært og homogent system av differensiallikninger med konstante koeffisienter* er et sett med n likninger og n ukjente

$$\begin{bmatrix}y_1'(t)\\y_2'(t)\\\vdots\\y_n'(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\\vdots\\y_n(t)\end{bmatrix}$$

På kortform skriver vi enkelt og greit

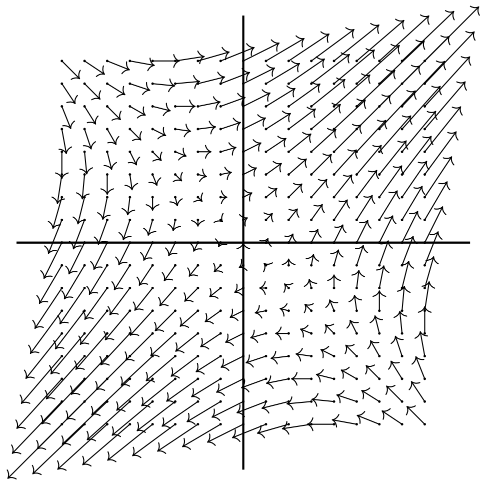
$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

og forkorter den lange tittelen til *system*.

Før man i det hele tatt begynner å løse systemet over, kan man få en ide om hvordan løsningskurvene kommer til å oppføre seg, ved å skissere systemets *vektorfelt*. Dette får man ved å evaluere høyresiden i likningssystemet for forskjellige verdier av $\mathbf{y}$, slik at man får ut stigningstallet til en eventuell løsningskurve i dette punktet, og så tegne disse i et koordinatsystem.

Eksempel 13.10. Her er en skisse av vektorfeltet assosiert med systemet

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix}1 & -2\\-2 & 1\end{bmatrix}\mathbf{y}.$$



$\triangle$

Løsningsteknikk

En konstant funksjon som løser systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, kalles en *likevektsløsning*. En mer interessant klasse av løsninger er beskrevet i neste teorem.

Teorem 13.11. *Vektorfunksjonen*

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}e^{\lambda t}$$

er en løsning av systemet

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

hvis og bare hvis λ er en egenverdi, og $\mathbf{x}$ den korresponderende egenvektor, til matrisen A.

Bevis. Vi beregner (husk at $e^{\lambda t}$ er en skalar)

$$A\mathbf{y} = A\mathbf{x}e^{\lambda t} = \lambda\mathbf{x}e^{\lambda t} = \left(\mathbf{x}e^{\lambda t}\right)' = \mathbf{y}'.$$

Omvendt kan vi se at dersom $\mathbf{x}e^{\lambda t}$ skal være en løsning av systemet, må

$$A\mathbf{x}e^{\lambda t} = \left(\mathbf{x}e^{\lambda t}\right)' = \lambda\mathbf{x}e^{\lambda t},$$

og hvis vi deler ut $e^{\lambda t} \neq 0$ får vi

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

som sier at $\mathbf{x}$ er en egenvektor med egenverdi λ. $\square$

Eksempel 13.12. Vi løser systemet

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorer er som kjent

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

med egenverdier -1 og 3, henholdsvis. Derfor er to løsninger av likningssystemet

$$\mathbf{y}_1 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t}. \qquad \triangle$$

Eksempel 13.13. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

har egenvektorer

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

med egenverdier henholdsvis 4, 9 og 0. Løsningene av $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ er

$$c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}, \quad c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{9t} \quad \text{og} \quad c_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Merk at den siste løsningen er en likevektsløsning, siden $\lambda = 0$. $\triangle$

Følgende teorem skal vi ikke bevise, for det er litt for hardt.

Teorem 13.14. *For systemet*

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

kan vi alltid finne n kontinuerlig deriverbare løsninger som utgjør et fundamentalsystem.

Dersom A er diagonaliserbar, kan vi finne n lineært uavhengige egenvektorer, og derfor finnes det i dette tilfellet n løsninger på formen

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{x}.$$

Siden egenvektorene er lineært uavhengige, er det lett å se at disse løsningene utgjør et fundamentalsystem. Men teoremet er imidlertid sant også for ikkediagonaliserbare matriser. Den enkleste måten å vise dette på, er å sette opp et fundamentalsystem av løsninger på formen

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{x}(t),$$

der $\mathbf{x}(t)$ er en polynomisk vektorfunksjon basert på noe som kalles *generaliserte egenvektorer*. Vi skal ikke gjøre dette.

Siden både venstre- og høyresiden av systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ er lineærtransformasjoner som tar inn vektoren $\mathbf{y}$, ser vi at lineærkombinasjoner av løsninger også er løsninger. Dette kalles *superposisjonsprinsippet*. Dersom A er en diagonaliserbar matrise, kan vi finne en løsning på formen

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{x}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{x}_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_n\mathbf{x}_n e^{\lambda_n t}$$

der $\mathbf{x}_k$ er egenvektorene til A, med korresponderende egenverdier λ_k. Denne kalles gjerne *den generelle løsningen*. Superposisjonsprinsippet gir at løsningene vi har funnet danner et vektorrom av dimensjon n, og vi skal siden se at de også danner en basis for vektorrommet av alle løsninger til $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Eksempel 13.15. Den generelle løsningen til systemet

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

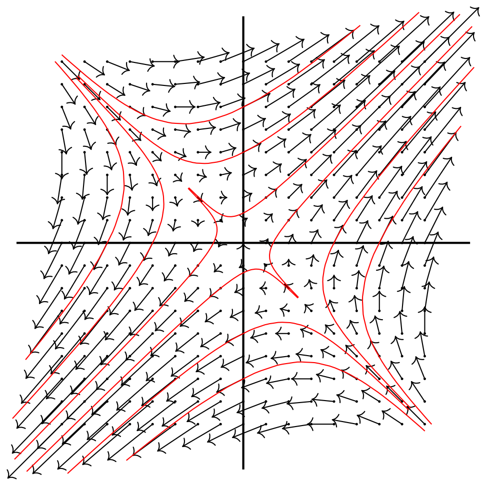
der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

er

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Under er et par løsningskurver, tegnet inn i vektorfeltet til systemet. Merk hvordan løsningene følger flyten i vektorfeltet.



$\triangle$

Eksempel 13.16. Den generelle løsningen til systemet med matrise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

er

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{9t} + c_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

I noen tilfeller er det naturlig å spesifisere et punkt $\mathbb{R}^n$ der løsningskurven skal starte.

Definisjon. Et *initialverdiproblem* er et likningssystem

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

med initialbetingelse

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

der $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. En kontinuerlig deriverbar løsning som tilfredsstiller dette kravet, kalles en *spesiell løsning*.

Eksempel 13.17. Den spesielle løsningen

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{9t} + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

til systemet i forrige eksempel, starter i punktet

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ved $t = 0$. △

Vi skriver opp de n løsningene fra 13.14 i en fundamentalmatrise $\mathbf{Y}$. Siden kolonnene i denne matrisen alltid utgjør en basis for $\mathbb{R}^n$, kan vi, uansett hva initialbetingelsen er, skrive opp en spesiell løsning:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0.$$

Spørsmålet er nå om dette er den eneste kontinuerlig deriverbare løsningen. Svaret kommer i neste teorem.

Teorem 13.18. *Et initalverdiproblem*

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

har en kontinuerlig deriverbar løsning som er entydig.

Bevis. Vi lar $\mathbf{Y}$ være et fundamentalsystem av løsninger. Fra teorem 13.14 vet vi at dette finnes. Husk at kolonnene i $\mathbf{Y}(t)$ alltid er lineært uavhengige, slik at $\mathbf{Y}(t)$ kan inverteres for alle t.

Vi vet at en kontinuerlig deriverbar løsning er gitt ved

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0.$$

Anta at det finnes en annen kontinuerlig deriverbar løsning $\mathbf{z}$. Siden kolonnene i $\mathbf{Y}(t)$ utgjør en basis for $\mathbb{R}^n$ for alle t, kan vi for hver verdi av t skrive

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}(t).$$

Siden $\mathbf{Y}(t)$ er inverterbar for alle t, kan vi skrive

$$\mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{z}(t) = \mathbf{c}(t),$$

og dette viser at også $\mathbf{c}$ er kontinuerlig deriverbar. Vi kan derfor trygt skrive

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{Y}'(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}'(t),$$

og siden både

$$\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t)$$

og

$$\mathbf{Y}'(t)\mathbf{c}(t) = A\mathbf{Y}(t)\mathbf{c}(t) = A\mathbf{z}(t),$$

kansellerer disse mot hverandre, og vi står igjen med

$$0 = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}'(t).$$

Siden kolonnene i $\mathbf{Y}(t)$ er lineært uavhengige og aldri null, impliserer likningen over at $0 = \mathbf{c}'(t)$, og følgelig er $\mathbf{c}(t)$ en konstant vektor. Siden $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{y}_0$, må $\mathbf{c} = \mathbf{Y}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0$ slik at $\mathbf{z} = \mathbf{y}$. □

Beviset over kan også brukes til å bevise at vektorrommet av løsninger er n-dimensjonalt. Dersom $\mathbf{z}$ er en tilfeldig valgt kontinuerlig deriverbar løsning av $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, kan vi for hver tid skrive

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}(t),$$

og resonnementet over viser at $\mathbf{c}$ må være en konstant vektor. Men dette er det samme som å si at $\mathbf{z}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av kolonnene i $\mathbf{Y}$, og dette betyr at de n kolonnene i $\mathbf{Y}$ utgjør en basis for løsningsrommet. Løsningsrommet er følgelig n-dimensjonalt.

Forskjellige typer løsninger i planet

Løsninger av diagonaliserbare 2×2-systemer kan klassifiseres ganske greit. Vi skal også ta med et tilfelle der A ikke er diagonaliserbar, for å gi en smakebit på den generelle teorien. Det er gunstig å dele inn i forskjellige tilfeller basert på egenverdiene til A, se på hva som skjer når $t \to \infty$, og plotte noen løsninger i et *fasediagram.*

Reelle egenverdier

Løsningen er

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{x}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{x}_2 e^{\lambda_2 t},$$

der både c_1, c_2, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ er relle. Vi illustrerer hva som kan skje med fire eksempler.

Eksempel 13.19. La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t}.$$

Merk at uansett hvilke kombinasjoner av c_1 og c_2 vi har, så lenge ikke begge er 0, vil alle løsninger reise mot uendelig når $t \to \infty$, altså vekk fra den eneste likevektsløsningen $\mathbf{y} = 0$. Vi sier derfor at $\mathbf{y}$ er en *ustabil likevektsløsning.* Nedenfor er plot av løsningskurver for et par tusen tilfeldige verdier av c_1 og c_2. △

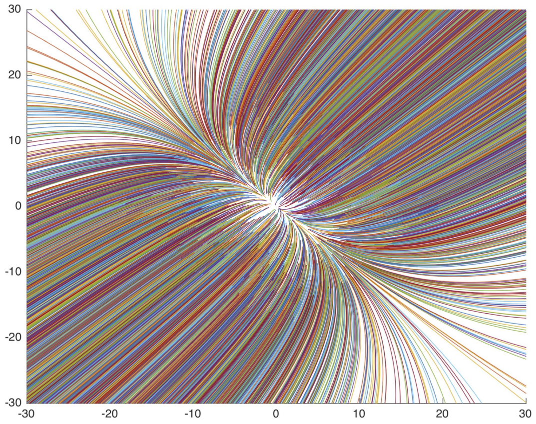
Eksempel 13.20. La

$$A = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Merk at uansett hvilke kombinasjoner av c_1 og c_2 vi har, så lenge ikke begge er 0, vil alle løsninger søke mot origo når $t \to \infty$, altså inn mot likevektsløsningen $\mathbf{y} = 0$. Vi sier derfor at $\mathbf{y}$ er en *stabil likevektsløsning.* △



Eksempel 13.19

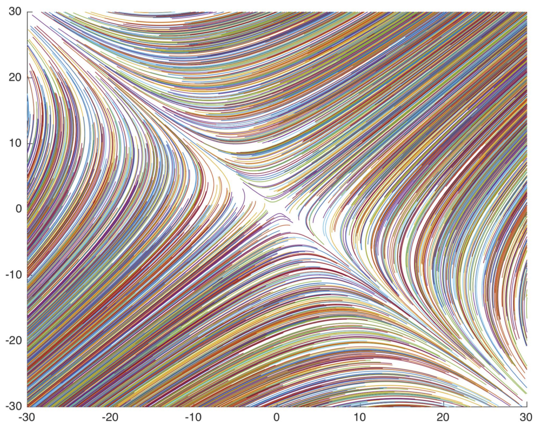
Eksempel 13.21. La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Merk at så lenge $c_1 \neq 0$, vil alle løsninger gå mot uendelig når $t \to \infty$, altså inn mot likevektsløsningen $\mathbf{y} = 0$. Men dersom $c_1 = 0$ og $c_2 \neq 0$, vil løsningen søke mot origo. Likevektsløsningen $\mathbf{y} = 0$ kalles derfor en *ustabil sadel.* $\triangle$



Eksempel 13.21

Eksempel 13.22. La

$$A = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

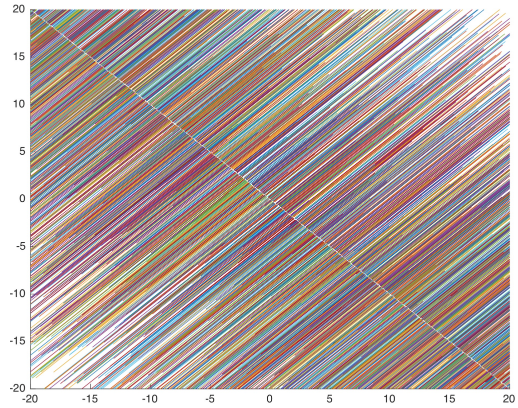
slik at

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Merk at så lenge $c_1 \neq 0$, vil alle løsninger søke mot likevektsløsningen

$$\mathbf{y} = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

og ingen mot $\mathbf{y} = 0$ når $t \to \infty$. $\triangle$



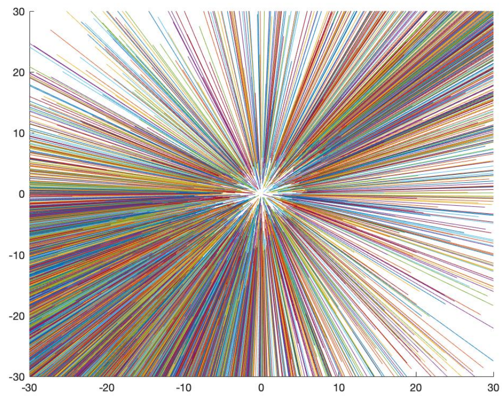
Eksempel 13.22

Eksempel 13.23. La

$$A = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{y} = e^{3t} \left(c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \qquad \triangle$$



Eksempel 13.23

Komplekse egenverdier

Vi har i øvingsopplegget vist at dersom en reell matrise har komplekse egenverdier, opptrer disse i komplekskonjugerte par. Du har kanskje lagt merke til at dette også gjelder for de respektive egenvektorene:

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \iff A\overline{\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}$$

Dette skal vi benytte oss av for å plukke ut relle løsninger. La $\lambda = \alpha + \beta i$ ha egenvektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

og husk at $e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$, slik at

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= c_2\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 \\
&= c_1 e^{\lambda t}\mathbf{x} + c_2 e^{\overline{\lambda} t}\overline{\mathbf{x}} \\
&= c_1 e^{\alpha t}\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right)(\cos\beta t + i\sin\beta t) \\
&\quad + c_2 e^{\alpha t}\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - i\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right)(\cos\beta t - i\sin\beta t).
\end{aligned}$$

Denne løsningen er pen på papiret, men vi ønsker å kunne visualisere litt, og da hadde det vært praktisk å finne en løsning som var reell istedet.

Siden $e^{\lambda t}\mathbf{x}$ og $e^{\overline{\lambda} t}\overline{\mathbf{x}}$ er lineært uavhengige for alle t, utgjør de en basis for $\mathbb{C}^2$. La oss søke en reell basis istedet. Vi kaller den nye basisen $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Velg først $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, og sett

$$\mathbf{v}_1 = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \sin\beta t\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right).$$

Så velger vi $c_1 = -c_2 = \frac{1}{2i}$, og setter

$$\mathbf{v}_2 = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \sin\beta t\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right).$$

Nå kan vi skrive

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 \\
&= d_1 e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \sin\beta t\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) \\
&\quad + d_2 e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \sin\beta t\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Merk at siden $\mathbf{y}_1$ og $\mathbf{y}_2$ er lineært uavhengige, og forholdet mellom disse og $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er gitt ved

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix},$$

er også $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ lineært uavhengige for alle t. Fordelen med den nye basisen er at vi nå enkelt kan skille ut alle reelle løsninger ved å holde oss til relle d_1 og d_2.

Eksempel 13.24. La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

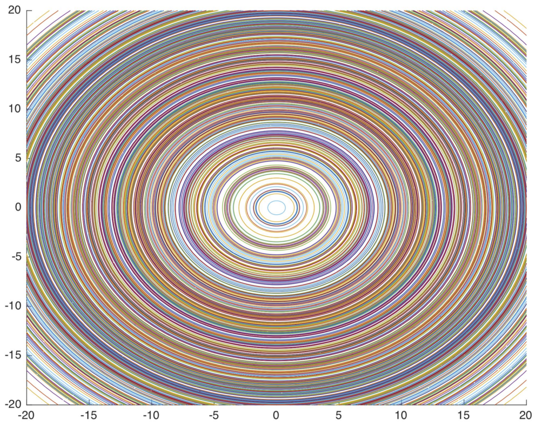
som har egenverdier $\pm i$ og egenvektorer

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Den generelle løsningen til systemet blir

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= d_1\left(\cos t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\
&\quad + d_2\left(\cos t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= d_1\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + d_2\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Vi ser at denne løsningen starter i punktet $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$ ved $t = 0$, og kjører deretter i en pen sirkulær bane om origo. Merk at kurven er traversert med klokken. △



Eksempel 13.24

Eksempel 13.25. La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

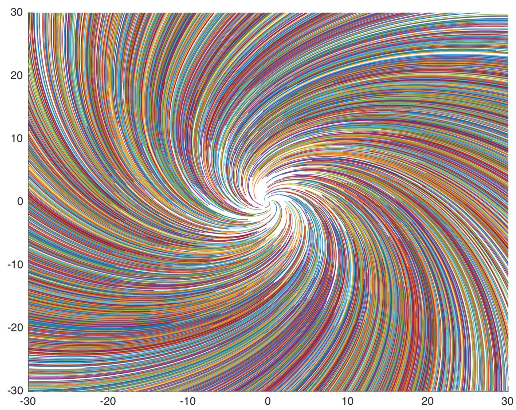
som har egenverdier $1 \pm i$ og de samme egenvektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

På samme vis som i forrige eksempel blir den generelle løsningen

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= d_1 e^t\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + d_2 e^t\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \\
&= e^t\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Denne løsningen starter i punktet $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$ ved $t = 0$, og kjører deretter i en særdeles vakker sirkulær og utadgående spiral. △



Eksempel 13.25

Eksempel 13.26. La

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

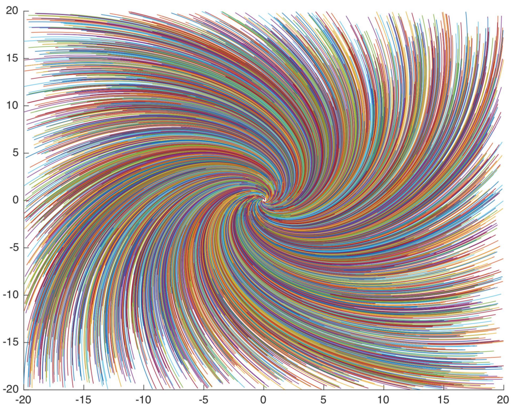
som har egenverdier $-1 \pm i$ og de samme egenvektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

På samme vis som i de to forrige eksemplene blir den generelle løsningen

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= d_1 e^{-t}\begin{bmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix} + d_2 e^{-t}\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}\\ &= e^{-t}\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1\\ d_2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Denne løsningen starter i punktet $\begin{bmatrix}d_1\\ d_2\end{bmatrix}$ ved $t = 0$, og kjører deretter i en innadgående sirkulær spiral. △



Eksempel 13.26

Defekt egenverdi - for spesielt interesserte!

Tilfellet at A ikke er diagonaliserbar, kan vi egentlig ikke analysere med teorien vi har lært til nå, så du skal slippe å kunne det til eksamen. Men vi tar en smakebit på hva som skjuler seg utenfor pensum.

Eksempel 13.27. La

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

som har dobbel egenverdi 1, men bare en egenvektor $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$. Hva gjør vi nå? △

For å løse knipen fra forrige eksempel, må vi gjøre noe artig, nemlig introdusere *generalisert egenvektor*. Egenvektoren til λ finner man ved å finne nullrommet til $A - \lambda I$. For en 2×2-matrise med defekt egenverdi, er en generalisert egenvektor en vektor i nullrommet til $(A - \lambda I)^2$.

Eksempel 13.28. La A være som i forrige eksempel. Nullrommet til

$$(A - I)^2 = \left(\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right)^2 = \left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

er alle vektorer i $\mathbb{C}^2$. Altså er alle vektorer i $\mathbb{C}^2$ generaliserte egenvektorer til matrisen A. Vi velger oss en tilfeldig vektor som ikke er parallell med $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$, for eksempel $\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$. Hvis vi ganger denne inn i $A - I$, får vi

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix},$$

som er en egenvektor. Hm. △

Hvordan bruker vi dette til å løse systemet?

Eksempel 13.29. Vektorene $\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$ er et eksempel på en *kjede av generaliserte egenvektorer*. Løsningen som korresponderer til den genaliserte egenvektorkjeden $\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$ er

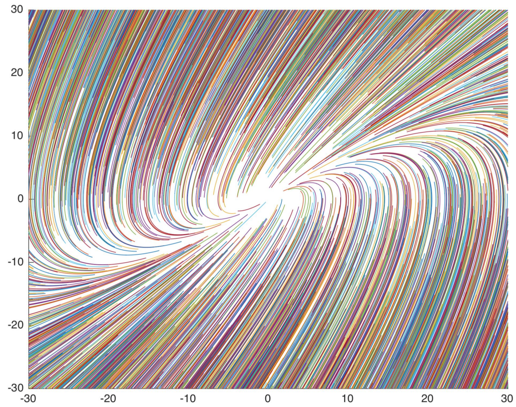
$$\mathbf{y}_2(t) = c_2 e^t\left(t\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\right).$$

Løsningen som korresponderer til egenvektoren vi fant tidligere, er

$$\mathbf{y}_1(t) = c_1 e^t\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.$$

Dette er to lineært uavhengige løsninger, og den generelle løsningen til systemet er

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^t\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} + c_2 e^t\left(t\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\right).$$ △



Eksempel 13.29

Variasjon av parametre

Vi skal ta for oss en type system av differensiallikninger, nemlig *førsteordens inhomogent lineært system av differensiallikninger med konstante koeffisienter*. Dette er et likningssystem på formen

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f},$$

der $\mathbf{f}$ er en spesifisert vektorfunksjon. Tittelen forkorter vi til *inhomogent system*.

Først kan vi merke oss at dersom vi har en løsning $\mathbf{z}$ til det inhomogene systemet, og en løsning $\mathbf{y}$ til det homogene systemet

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y},$$

vil $\mathbf{z} + \mathbf{y}$ løse det inhomogene systemet. Det er derfor vanlig å splitte løsninger i

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p$$

der $\mathbf{y}_h$ er den generelle løsningen til det homogene systemet, og $\mathbf{y}_p$ er en løsning til det inhomogene systemet. Den første kalles *den homogene løsningen*, mens den siste kalles enten *den inhomogene løsningen* eller *partikulærløsningen*. Ofte går det an å gjette formen på partikulærløsningen.

Eksempel 13.30. Vi løser likningssystemet

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}$$

der

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Den homogene løsningen er som kjent

$$\mathbf{y}_h = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t}.$$

Men hva med den inhomogene? Siden $\mathbf{f}$ er en konstant vektor, er det ikke utenkelig at $\mathbf{y}_p$ også er det. Vi prøver. La

$$\mathbf{y}_p = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Vi setter denne inn i likningen, og får

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette går fint dersom

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som gir

$$\mathbf{y}_p = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

Løsningen er med andre ord

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

△

Men det er ikke alltid så lett å gjette formen på $\mathbf{y}_p$. Vi sakl nå utlede en formel som alltid finner $\mathbf{y}_p$, men den involverer et integral, og kan være komplisert å beregne. Strategien baserer seg på å ta utgangspunkt i $\mathbf{y}_h$. Vi lar $\mathbf{Y}$ være fundamentalmatrisen. Siden kolonnene i $\mathbf{Y}(t)$ alltid utgjør en basis for $\mathbb{R}^n$, er det rimelig å forvente at en kontinuerlig deriverbar partikulærløsning, dersom den finnes, kan skrives

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}(t).$$

der $\mathbf{c}$ er en vektorfunksjon. Akkurat som i beviset for teorem 13.18, ser vi at $\mathbf{c}$ må være kontinuerlig deriverbar. Vi kan derfor trygt skrive $\mathbf{y}_p' t = \mathbf{Y}'\mathbf{c} + \mathbf{Y}\mathbf{c}'$, og sette dette inn i den inhomogene likningen:

$$\mathbf{Y}'\mathbf{c} + \mathbf{Y}\mathbf{c}' = A\mathbf{Y}\mathbf{c} + \mathbf{f}.$$

Men siden

$$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y},$$

kan likningen forkortes til

$$\mathbf{Y}\mathbf{c}' = \mathbf{f},$$

og siden $\mathbf{Y}$ er inverterbar for alle t, kan vi invertere

$$\mathbf{c}' = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{f}$$

og integrere komponentvis

$$\mathbf{c}(t) = \int_0^t \mathbf{Y}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\, ds.$$

Denne løsningsformelen gir korrekt løsning, dersom det er mulig å utføre integralet på høyre side. Integralet skal selvfølgelig tolkes komponentvis.

Eksempel 13.31. La nok en gang

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{t} \\ e^{3t} & -e^{t} \end{bmatrix}$$

og la

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi beregner

$$\mathbf{Y}^{-1} = \frac{-1}{2e^{4t}} \begin{bmatrix} -e^{t} & -e^{t} \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{f} = \frac{-1}{2e^{4t}} \begin{bmatrix} -e^{t} & -e^{t} \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{c}(t) = \int_0^t \mathbf{Y}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\, ds = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} e^{-3t} - 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_p(t) &= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{t} \\ e^{3t} & -e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3t} - 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{e^{3t}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Det siste leddet er en homogen løsning. Denne blir som regel med på grunn av den nedre integrasjonsgrensen. Denne integrasjonsgrensen representerer en konstant lineærkombinasjon av kolonnene i $\mathbf{Y}$, og kan egentlig sløyfes helt, siden den ikke gjør noe annet enn å legge til vilkårlige homogene løsninger i det endelige svaret. △