Kapittel 14

Andre ordens lineære differensiallikninger

I dette kapitlet skal vi bruke det vi har lært om systemer av differensiallikningssystemer til å løse andre ordens differensiallikninger. I M1 har du løst to typer differensiallikninger. Den ene er den første ordens lineære likningen

$$y' + f(t)y = g(t)$$

og den andre er den separable likningen

$$y' = f(y)g(t).$$

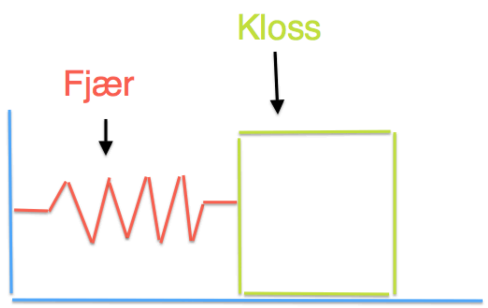
I dette kapitlet skal vi behandle lineære andreordens differensiallikninger med konstante koeffisienter:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

Det er vanlig å kreve at $y \in \mathcal{C}^2$, altså at y har to kontinuerlige deriverte. På denne måten kan man sikre at likningen faktisk gir mening. Det finnes mange situasjoner der dette kravet kan slakkes noe, men det er pensum i matte 4.

Hvor kommer andre ordens differensiallikninger fra?

En kloss sklir friksjonsfritt på underlaget, og er festet til veggen med en fjær. Hookes fjærlov sier at



$$F(y) = -ky,$$

der y er hvor langt fjæren er strukket eller komprimert, k er en konstant som avhenger av fjærens stivhet, og $F(y)$ er kraften fra fjæren på klossen. Dersom $y(t)$ er klossens posisjon, er klossens akselerasjon gitt ved $y''(t)$, og Newtons andre lov blir

$$-ky = my'',$$

der m er klossens masse. Dette er en differensiallikning. Vi skriver vanligvis

$$my'' + ky = 0.$$

Vi kan komplisere det litt til. La oss innføre luftmotstand. Luftmotstand avhenger kvadratisk av farten:

$$F(y') = b(y')^2;$$

der b er en proporsjonalitetskonstant som sier noe om luftmotstanden. Den totale kraften blir

$$F(y, y') = -ky + b(y')^2,$$

slik at Newtons andre lov gir

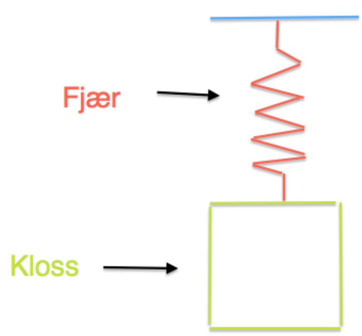
$$my'' - b(y')^2 + ky = 0.$$

Denne likningen har et problematisk ledd, $b(y')^2$. Men vi kan gjøre en forenkling. Dersom klossen ligger i en tyktflytende væske, blir motstanden proporsjonal med farten istedet for kvadratet av farten, og vi får likningen

$$my'' - cy' + ky = 0,$$

som er mye enklere å løse.

Nå skal vi komplisere det enda litt. La klossen henge fra taket. I tillegg til fjærkraften og luftmotstanden, vil nå også gravitasjonen påvirke bevegelsen. Gravitasjonskraften er en konstant kraft mg nedover. Den totale kraften er



$$F(y, y') = -ky + by' - mg,$$

og Newtons andre lov gir differensiallikningen

$$my'' - by' + ky = mg.$$

Noen småting

Vi skal behandle *andre ordens differensiallikninger med konstante koeffisienter*:

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

Det er vanlig å sette $a_2 = 1$, for å forenkle analysen. Vi slipper å ha med a_2 i alle formler og utledninger, og vi slipper å luke ut $a_2 = 0$ hver gang vi skal sette opp et teorem. Dersom a_2 skulle slumpe til å være noe annet enn 1, kan du dele den ut av likningen før du setter igang.

Det er tradisjonelt og praktisk å sortere likninger i to kategorier, de homogene:

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

og de inhomogene:

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

Løsningsteknikk for homogene likninger

Vi kaller gjerne løsningen av

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

for y_h, der h-en står for homogen. Det første man kan merke seg, er at vi har allerede lært å løse denne typen likning i forrige kapittel. Dersom vi innfører de nye variablene $v_1 = y$ og $v_2 = y'$, kan likningen skrives om til systemet

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}'$$

Vi vet derfor at vi kan forvente to lineært uavhengige løsninger. Det karakteristiske polynomet til matrisen er:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0.$$

Egenvektoren til λ er:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Den karakteristiske likningen kjenner du forhåpentligvis igjen fra gymnaset, der du lærte å løse disse likningene. Den gang sa de noe sånt som at alle løsninger var på formen $Ce^{\lambda t}$, og så satte de dette uttrykket inn i differensiallikningen for å utlede den karakteristiske likningen.

Vi kan bruke analysen fra forrige oppgave til å liste opp løsningen til den homogene likningen for forskjellige typer egenverdier. Merk at vi er i utgangspunktet kun interessert i v_1, og derfor ikke har bruk for egenvektorene når vi skal skrive opp homogene løsninger.

Dersom $\lambda_1 \neq \lambda_2$ er reelle, kan vi plukke ut førstekomponenten av den generelle løsningen av systemet, og få

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Dersom $\lambda = \alpha \pm \beta i$, slik at

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix},$$

får vi

$$y_h(t) = d_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + d_2 e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Dersom $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, kan vi stokke litt om på verdiene til c_1 og c_2, og få

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}.$$

Eksempel 14.1. Løsningen til

$$y'' - y = 0$$

er

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}. \qquad \triangle$$

Eksempel 14.2. Løsningen til

$$y'' + y = 0$$

er

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t. \qquad \triangle$$

Eksempel 14.3. Løsningen til

$$y'' - 2y' + y = 0$$

er

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t. \qquad \triangle$$

Løsningsteknikk for inhomogene likninger

Tilsvarende kalles vi løsningen til

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

for y_p, der p står for partikulær. La $y_h = y_1 + y_2$, der y_1 og y_2 være to lineært uavhengige homogene løsninger. I kapitlet om systemer av differensiallikninger utledet vi en formel for løsningen til inhomogene systemer. Dersom du setter løsningene fra dette kapitlet inn i formelen inn i den, vil du få

$$\begin{aligned} y_p(t) = y_2 & \int_0^t \frac{y_1(s) f(s)}{y_1(s) y_2'(s) - y_2(s) y_1'(s)}\, ds \\ - y_1 & \int_0^t \frac{y_2(s) f(s)}{y_1(s) y_2'(s) - y_2(s) y_1'(s)}\, ds. \end{aligned}$$

Selve utregningen er ikke så interessant, så vi overlater den til spesielt interesserte.

Eksempel 14.4. Den homogene løsningen til

$$y'' - y = e^{2t}$$

er

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} = c_1 y_1(t) + c_1 y_2(t),$$

slik at

$$\begin{aligned} y_p(t) = y_2 & \int \frac{y_1(t) f(t)}{y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t)}\, dt \\ - y_1 & \int \frac{y_2(t) f(t)}{y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t)}\, dt \\ = e^{-t} & \int \frac{e^t e^{2t}}{-e^t e^{-t} - e^{-t} e^t}\, dt \\ - e^t & \int \frac{e^{-t} e^{2t}}{-e^t e^{-t} - e^{-t} e^t}\, dt = \frac{1}{3} e^{2t}, \end{aligned}$$

og

$$y = y_h + y_p = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}. \qquad \triangle$$

Eksempel 14.5. Den homogene løsningen til

$$y'' - y = e^t$$

er

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t},$$

slik at

$$\begin{aligned} y_p(t) &= e^{-t} \int \frac{e^t e^t}{-e^t e^{-t} - e^{-t} e^t} \, dt \\ &\quad - e^t \int \frac{e^{-t} e^t}{-e^t e^{-t} - e^{-t} e^t} \, dt = \frac{1}{2}(t-1)e^t, \end{aligned}$$

og

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2}(t-1)e^t. \qquad \triangle$$

Eksempel 14.6. Den homogene løsningen til

$$y'' + y = \sin t$$

er

$$y_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

slik at

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \sin t \int \frac{\cos t \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \, dt \\ &\quad - \cos t \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \, dt \\ &= \sin t \int \cos t \sin t \, dt - \cos t \int \sin^2 t \, dt \\ &= -\frac{1}{4} \sin t \cos 2t - \cos t \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \right) \\ &= -\frac{1}{2} t \cos t - \sin t. \end{aligned}$$

Merk at den homogene løsningen $y_1 = \sin x$ dukket opp i prosessen. Dette skjer av og til, men gjør ingenting. Vi har

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{2} t \cos t. \qquad \triangle$$

Med litt trening vil du merke at du ikke alltid trenger å bruke den store formelen for å finne den partikulære løsningen. Med litt erfaring kan man gjette hva den er. En grundig diskusjon av dette er imidlertid kjedelig og langdryg, og det krever mye trening å se hva løsningen er i noen tilfeller. I andre tilfeller går det ikke an å gjette på partikulærløsningen, og også disse tilfellene krever mye erfaring å se med det blotte øye.

Eksempel 14.7. Det trengs ikke særlig rutine for å se at den inhomogene løsningen til

$$y'' + 2y = 1$$

må åpenbart være en konstant funksjon $f(x) = K$. Innsetting gir

$$0 + 2K = 1,$$

slik at $K = 1/2$. $\triangle$

Eksempel 14.8. Det trengs heller ikke særlig rutine for å se at den inhomogene løsningen til

$$y'' + y = e^t$$

er Ke^t. Innsetting gir K på samme måte som i forrige eksempel. Det trengs derimot endel erfaring for å gjette at partikulærløsningen til

$$y'' + y = \sin t$$

er på formen $Kt \cos t$. Dette er fordi $\sin t$ er en homogen løsning. $\triangle$

Initialverdiproblem

Til slutt kan vi registrere at den generelle løsningen til

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

er

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Merk at det finnes to ubestemte koeffisienter i y_h, så et initialverdiproblem trenger to betingelser - den vanligste formen er

$$y(t_0) = a, \quad y'(t_0) = b.$$

Eksempel 14.9. Løsningen til initialverdiproblemet

$$y'' - y = e^{2t}$$

med betingelser

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

er

$$y = \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}. \qquad \triangle$$

Det ikkediagonaliserbare tilfellet

Dersom $a_1^2 = 4a_0$, slik at likningen

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

kun har en løsning, er vi i det ikkediagonaliserbare tilfellet fra forrige kapittel. Men i dette kapitlet finnes det et triks.

Eksempel 14.10. Vi ser på likningen

$$y'' + 2y + y = 0.$$

Den karakteristiske likningen er

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

som kun har løsningen $\lambda = 1$. Merk nå at

$$\left(y e^t \right)'' = e^t \left(y'' + 2y + y \right) = 0.$$

Dersom vi integrerer denne likningen to ganger, får vi

$$y = e^{-t} \left(c_1 t + c_0 \right),$$

slik som i avsnittet om generaliserte egenvektorer i forrige kapittel. $\triangle$