Kapittel 2

Lineære ligningssystemer og gausseliminasjon

Vi skal lære en metode for å finne og beskrive alle løsninger av systemer av m lineære ligninger med n ukjente.

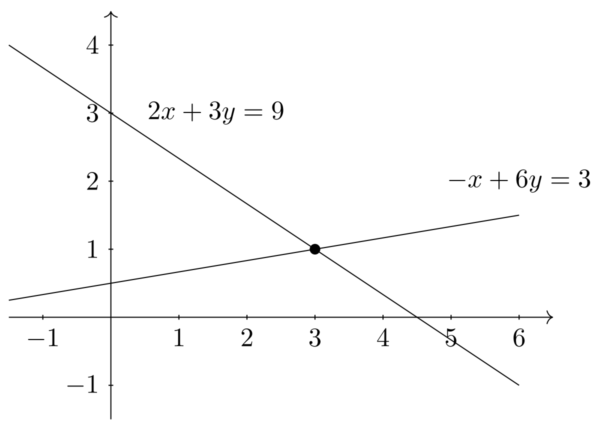
Oppvarming

Her er et eksempel på et lineært ligningssystem med $m = n = 2$:

$$(*) \begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ -x + 6y = 3 \end{cases}$$

La oss løse systemet over med tre forskjellige metoder.

Eksempel 2.1. Husk den geometriske tolkinga av ligningssystemer fra introduksjonskapitlet. Hver av de to ligningene $2x+3y = 9$ og $-x+6y = 3$ beskriver en rett linje:



Løsningene av $2x + 3y = 9$ er alle punkter som ligger på den ene linjen, mens løsningene av $-x + 6y = 3$ er alle punkter som ligger på den andre linjen. Den felles løsningen av begge ligningene er punktet der de to linjene møtes, nemlig $(3, 1)$. Løsningen er altså $x = 3$ og $y = 1$. △

Eksempel 2.2. Vi tar så metoden du lærte på skolen. For å løse systemet $(*)$ med denne metoden kan vi først løse den andre ligningen med hensyn på x; da får vi:

$$x = 6y - 3$$

Så setter vi dette inn i den første ligningen og forenkler:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (6y - 3) + 3y &= 9 \\ 15y &= 15 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Til slutt setter vi denne y-verdien inn i uttrykket vi fant for x, og får:

$$x = 6y - 3 = 6 - 3 = 3$$

For at begge ligningene skal være oppfylt, må vi altså ha at $x = 3$ og $y = 1$. Vi sjekker at dette virkelig er en løsning av $(*)$ ved å sette inn disse verdiene i begge de opprinnelige ligningene:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6 + 3 = 9 \\ -x + 6y &= -3 + 6 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

Det er tydelig at systemet $(*)$ har nøyaktig én løsning, nemlig $x = 3$ og $y = 1$. △

Metoden i eksempelet over er enkel å forstå, men kan bli tungvint å bruke hvis vi har mer enn to ukjente. Vi ser på en tredje løsningsmetode.

Eksempel 2.3. Vi ganger opp den andre ligningen med 2, og legger deretter sammen de to ligningene:

$$\begin{array}{rl} 2x + 3y = 9 & \text{(første ligning)} \\ -2x + 12y = 6 & \text{(andre ligning ganget med 2)} \\ \hline 15y = 15 & \text{(sum av ligningene over)} \end{array}$$

På denne måten får vi x til å forsvinne. Den nye ligningen $15y = 15$ kan vi forenkle til $y = 1$. Nå kan vi gange opp denne med -3 og legge sammen med den første ligningen fra systemet for å få en ligning der y forsvinner:

$$\begin{array}{rl} 2x + 3y = 9 & \text{(første ligning fra } (*)\text{)} \\ -3y = -3 & \text{(ny ligning ganget med } -3\text{)} \\ \hline 2x = 6 & \text{(sum av ligningene over)} \end{array}$$

Nå har vi fått en ligning med bare x, og vi forenkler den til $x = 3$. Vi har dermed igjen funnet løsningen $x = 3$ og $y = 1$. △

Denne metoden kalles *gausseliminasjon*, og er standardmetoden for å løse ligningssystemer.

Ekvivalente systemer

Vi sier at to ligningssystemer er *ekvivalente* dersom de har samme løsningsmengder. De grunnleggende idéen bak gausseliminasjon er å steg for steg ersatte det opprinnelige systemet med nye ligningssystemer som har samme løsningsmengde, men som er stadig enklere.

Eksempel 2.4. La oss løse det følgende lineære ligningssystemet:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ x + 5y + 9z = 33 \\ 2x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

Vi vil begynne med å eliminere x-en fra de to siste ligningene. Hvis vi trekker den første ligningen fra den andre, får vi den nye ligningen

$$3y + 11z = 38.$$

Vi bytter ut den andre ligningen i systemet med denne nye ligningen:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ 3y + 11z = 38 \\ 2x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

Dette systemet er ekvivalent med det vi startet med, siden den nye ligningen følger fra to av de opprinnelige ligningene. Dermed må enhver løsning av det opprinnelige systemet også være en løsning av det nye systemet. Omvendt er det også slik at den opprinnelige midterste ligningen (som vi nå har tatt vekk) følger av de to første ligningene i det nye systemet, slik at enhver løsning av det nye systemet også må være en løsning av det gamle. Til sammen betyr dette at de to systemene er ekvivalente.

Vi fortsetter å forenkle systemet. Vi eliminerer x fra den siste ligningen ved å trekke fra første ligning ganget med 2:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ 3y + 11z = 38 \\ y + 3z = 10 \end{cases}$$

Igjen har vi et nytt system som er ekvivalent med det forrige.

Nå vil vi eliminere y fra den siste ligningen. Men det er lettere å eliminere y fra den midterste ligningen (ved å trekke fra 3 ganger den siste). Ligningenes rekkefølge spiller imidlertid ingen rolle, så vi kan bytte om på de to nederste ligningene først:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ y + 3z = 10 \\ 3y + 11z = 38 \end{cases}$$

Så eliminerer vi y fra den siste ligningen ved å trekke fra andre ligning ganget med 3:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ y + 3z = 10 \\ 2z = 8 \end{cases}$$

Nå ser vi fra den siste ligningen at vi må ha:

$$z = 4$$

Ved å sette inn det i den midterste ligningen får vi:

$$y = 10 - 3 \cdot 4 = -2$$

Til slutt får vi, ved å sette inn y og z i den øverste ligningen:

$$x = -5 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 7$$

Systemet har altså én løsning:

$$x = 7 \qquad y = -2 \qquad z = 4$$

△

Gausseliminasjon produserer altså en kjede av ekvivalente ligningssystemer, der det siste har så enkel struktur at løsningen kan skrives opp.

Totalmatrisen til et system

Generelt ser et lineært ligningssystem med m ligninger og n ukjente slik ut:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Merk at all relevant informasjon om ligningssystemet er inneholdt i følgende matrise:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Denne kalles *totalmatrisen*, eller *den utvidete matrisen* til ligningssystemet.

Eksempel 2.5. Ligningssystemet vi startet med i eksempel 2.4 har følgende totalmatrise:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 1 & 5 & 9 & 33 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

△

Den loddrette streken inni matrisen er praktisk for å hjelpe oss med å huske at det som står til høyre for streken hører til høyre side av ligningene.

Et hvilket som helst lineært ligningssystem kan løses ved å gjøre operasjoner på totalmatrisen til systemet etter bestemte regler. Disse reglene kalles *radoperasjoner*, og den enkle strukturen som tillater at løsningen kan skrives opp, kalles *trappeform.*

Radoperasjoner

Følgende tre måter å endre en matrise på kalles *radoperasjoner*:

1. Gange alle tallene i en rad med det samme tallet. Dette betyr å gange en ligning med et tall. Vi kan ikke gange med 0.

2. Legge til et multiplum av en rad i en annen. Dette er å kombinere ligninger til nye ligninger.

3. Bytte rekkefølge på radene. Dette er det samme som å bytte rekkefølge på ligningene.

Vi sier at to matriser er *radekvivalente* hvis vi kan komme fra den ene til den andre ved å utføre en eller flere radoperasjoner. Vi bruker notasjonen $M \sim N$ for å si at to matriser M og N er radekvivalente.

Eksempel 2.6. Disse matrisene er radekvivalente, siden vi får den andre matrisen fra den første ved å gange øverste rad med 4:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 8 & 20 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \end{array}\right]$$

Merk at vi også kan gå motsatt vei: Ved å gange øverste rad i den andre matrisen med 1/4 får vi tilbake den første matrisen.

Disse to matrisene er også radekvivalente:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 9 & 5 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Her har vi brukt den andre typen radoperasjon: Vi la til -3 ganger øverste rad i nederste rad for å komme fra den første matrisen til den andre. Merk igjen at vi også kan gå motsatt vei: Ved å legge til 3 ganger øverste rad i nederste rad, kommer vi fra den andre matrisen til den første. △

Hele poenget med radoperasjoner er at det å utføre en radoperasjon på en totalmatrise tilsvarer å skrive om ligningssystemet til et nytt system som er ekvivalent med det opprinnelige. Vi formulerer dette som et teorem:

Teorem 2.7. *Hvis to ligningssystemer har radekvivalente totalmatriser, så er de to ligningssystemene ekvivalente.*

Bevis. For å bevise dette, er det nok å vise at det å gjøre en radoperasjon på totalmatrisen til et ligningssystem tilsvarer å gjøre en gyldig omskrivning av systemet selv.

Den første typen radoperasjon – å gange alle tallene i en rad med samme tall – tilsvarer å gange med det samme tallet på begge sider av en ligning. La oss si at

$$a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in} \mid b_i$$

er en av radene i totalmatrisen, og at vi ganger opp denne med tallet c slik at vi får:

$$(ca_{i1})\ (ca_{i2})\ \cdots\ (ca_{in}) \mid (cb_i)$$

Dette tilsvarer at vi bytter ut ligningen

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

med den nye ligningen

$$(ca_{i1})x_1 + (ca_{i2})x_2 + \cdots + (ca_{in})x_n = cb_i.$$

Men det er klart at hvis den opprinnelige ligningen var sann, så må også den nye være det. Og siden det ikke tillates at tallet c som vi ganger med er 0, så har vi også det motsatte: Hvis den nye ligningen er sann, så må også den opprinnelige være det. Altså gjør vi ingen endring i løsningene av ligningssystemet ved å utføre denne typen radoperasjon.

For den andre typen radoperasjon – legge til et multiplum av en rad i en annen – kan vi på tilsvarende måte se at den nye raden vi lager tilsvarer en ligning som må være sann hvis de gamle ligningene var sanne. Sett at vi legger til c ganger rad i i rad j. Dette tilsvarer at vi ganger opp den i-te ligningen med c, og legger til resultatet i den j-te ligningen. Alle løsninger av de gamle ligningene må da også være løsninger av denne nye ligningen. Dessuten kan vi komme tilbake til det gamle systemet (ved å legge til $-c$ ganger rad i i rad j), og dermed må alle løsninger av det nye systemet også være løsninger av det gamle.

Den tredje og siste typen radoperasjon – bytte rekkefølge på radene – gjør åpenbart ingen endringer i løsningene av ligningssystemet, siden dette bare tilsvarer å skrive ligningene i en annen rekkefølge. □

Eksempel 2.8. Vi gjentar regningen i eksempel 2.4, denne gangen ved å utføre radoperasjoner på totalmatrisen til ligningssystemet:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 1 & 5 & 9 & 33 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 11 & 38 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 11 & 38 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 3 & 11 & 38 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Her gjorde vi følgende radoperasjoner: Legge til -1 ganger første rad i andre rad, legge til -2 ganger første rad i tredje rad, bytte andre og tredje rad, og legge til -3 ganger andre rad i tredje rad.

Den siste matrisen her er på det som kalles trappeform, og da er det (som vi så i eksempel 2.4) lett å finne løsningen. Hvis vi vil gjøre det enda lettere, kan vi fortsette med radoperasjoner til vi oppnår det som kalles *redusert trappeform*:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Den siste totalmatrisen her svarer til følgende ligningssystem:

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Her har vi altså kommet helt frem til løsningen. △

Trappeform

Vi vil nå gi en presis definisjon av begrepene «trappeform» og «redusert trappeform». Da trenger vi også et annet begrep, nemlig «pivotelement».

Definisjon. Det første tallet i en rad i en matrise som ikke er 0 kalles *pivotelementet* for den raden. (En rad med bare nuller har ikke noe pivotelement.) △

Eksempel 2.9. Se på følgende matrise:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 12 \\ 1 & 8 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivotelementene her er tallet 3 i den øverste raden, tallet 5 i den andre raden og tallet 1 i den tredje raden. Den siste raden består av bare nuller, og har derfor ikke noe pivotelement. △

Definisjon. En matrise er på *trappeform* dersom hvert pivotelement er til høyre for alle pivotelementer i tidligere rader, og eventuelle nullrader er helt nederst. △

Eksempel 2.10. Denne matrisen er på trappeform:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pivotelementene er 3, 1 og 2, og hvert av dem er til høyre for alle de tidligere pivotelementene.

Denne matrisen er også på trappeform:

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen er ikke på trappeform fordi nullradene ikke er samlet nederst:

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen ser «trappete» ut, men er likevel ikke på trappeform:

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Grunnen til at den ikke er på trappeform er at pivotelementet 9 i tredje rad ikke er til høyre for pivotelementet i andre rad, men rett under det isteden. △

Definisjon. En matrise er på *redusert trappeform* hvis den er på trappeform og dessuten oppfyller:

- Alle pivotelementene er 1.
- Alle tall som står over pivotelementer er 0. △

Den siste matrisen i eksempel 2.8 er på redusert trappeform, og der så vi også hva som gjør redusert trappeform nyttig: Løsningen av systemet kan leses av direkte.

Alle systemer av lineære ligninger kan løses på denne måten. Dette kan formuleres presist, som følger.

> **Teorem 2.11.** *For enhver $m \times n$-matrise M, finnes en $m \times n$-matrise N på redusert trappeform, slik at M og N er radekvivalente.*

En generell og presis algoritme for gausseliminasjon kommer i øvingsopplegget. Kort fortalt finner vi trappeform ved å:

- velge en rad R med et pivotelement lengst mulig til venstre, og flytte denne raden øverst,
- skalere raden, slik at pivotelement blir 1,
- gjøre radoperasjoner slik at vi får 0 under ovennevnte pivotelement,
- «glemme» raden R, og så gjenta denne prosedyren for delmatrisen bestående av de «ikke-glemte» radene.

Deretter finner vi redusert trappeform ved å:

- starte med den nederste raden R som ikke er null (som nå har pivotelement 1),
- gjøre radoperasjoner slik at vi får 0 over ovennevnte pivotelement,
- «glemme» raden R, og gjenta prosedyren for radene over.

Eksistens, entydighet og parametrisering av løsninger

Når vi vil løse et ligningssystem, er det noen åpenbare spørsmål vi kan stille:

- Har systemet noen løsning? (*Eksistens*)
- Hvis systemet har løsning: Har det også flere løsninger, eller bare én? (*Entydighet*)

I eksempel 2.8 hadde vi et system med entydig løsning. Vi tar noen flere eksempler for å vise andre ting som kan skje.

Eksempel 2.12. La oss lete er løsninger på følgende system:

$$\begin{cases} x - \ \ 2y = 1 \\ -5x + 10y = -1 \end{cases}$$

Vi setter opp totalmatrisen og gausseliminerer:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 10 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Den siste matrisen svarer til følgende system:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0x + 0y = 4 \end{cases}$$

ligningen $0x + 0y = 4$ kan også skrives som $0 = 4$, og den kan ikke stemme uansett hva vi setter x og y til å være. Dette systemet har altså ingen løsning. △

Generelt er det slik at hvis vi får en rad i totalmatrisen vår på formen

$$0\ 0\ \cdots\ 0 \mid b,$$

der b er et tall som ikke er 0, så har systemet ingen løsning. Denne raden svarer jo til ligningen $0 = b$, som ikke kan være sann. Hvis vi har en matrise på trappeform der ingen av radene er på denne formen, så har systemet minst én løsning.

Men et lineært ligningssystem kan også ha mer enn én løsning, som vi skal se i det neste eksempelet.

Eksempel 2.13. La oss løse følgende system:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 16 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 21 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 32 \end{cases}$$

Vi setter opp totalmatrisen og gausseliminerer:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & 16 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 21 \\ 2 & 6 & 4 & 6 & 32 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Den siste matrisen svarer til følgende system:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_4 = 6 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$$

Her har vi ikke tatt med noen ligning for nullraden i matrisen. Det er fordi nullraden står for ligningen $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$, eller med andre ord $0 = 0$. Denne ligningen er åpenbart oppfylt uansett hva x_i-ene er, så vi trenger ikke ta den med.

Hvis vi flytter alt unntatt x_1 og x_3 til høyresiden, ser systemet slik ut:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - 7x_4 + 6 \\ x_3 = 2x_4 + 5 \end{cases}$$

Vi kan altså finne løsninger av systemet ved å sette x_2 og x_4 til å være hva vi vil, og deretter bruke disse to likhetene til å bestemme x_1 og x_3.

Hvis vi for eksempel velger $x_2 = 0$ og $x_4 = 1$, så får vi følgende løsning:

$$\begin{cases} x_1 = -3 \cdot 0 - 7 \cdot 1 + 6 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \cdot 1 + 5 = 7 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

For å beskrive alle løsningene av systemet på en ryddig måte, kan vi sette $x_2 = s$ og $x_4 = t$, der s og t står for to vilkårlige tall. Da er alle løsningene gitt ved:

$$\begin{cases} x_1 = -3s - 7t + 6 \\ x_2 = s \\ x_3 = 2t + 5 \\ x_4 = t \end{cases}$$

Dette kan vi skrive på vektorform

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Variabler som vi kan sette til hva vi vil, slik som x_2 og x_4 i eksempelet over, kalles *frie variabler.* △

Når vi løser et lineært ligningssystem, og har funnet ut at det har minst én løsning, så er det to muligheter. Den ene muligheten er at vi ikke får noen frie variabler (slik som i eksempel 2.8). Da har systemet entydig løsning. Den andre muligheten er at det er én eller flere frie variabler (slik som i eksempel 2.13). Da har systemet uendelig mange løsninger, siden hver av de frie variablene kan settes til å være et hvilket som helst tall.

La oss oppsummere det vi har funnet ut om eksistens og entydighet av løsninger. For ethvert lineært ligningssystem må én av følgende være sant:

- Systemet har ingen løsning.
- Systemet har entydig løsning.
- Systemet har uendelig mange løsninger.

Valgfrihet

Når vi gausseliminerer har vi en viss grad av valgfrihet. Det som står fast er hva vi har lov til å gjøre, nemlig de tre typene radoperasjoner, og hva vi vil ende opp med, nemlig (redusert) trappeform. Nøyaktig hvordan vi bruker radoperasjoner for å komme frem kan vi velge selv.

Vi tar et enkelt eksempel for å illustrere dette.

Eksempel 2.14. Anta at vi vil gausseliminere denne totalmatrisen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 8 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 9 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

Her er vi nødt til å bytte øverste rad med en av de to andre for å få pivotelementet i første rad på riktig sted. Men vi velger selv hvilken av de to radene vi vil flytte til toppen. △

Vi har også noe frihet når det gjelder valg av frie variabler.

Eksempel 2.15. I eksempel 2.13 endte vi opp med at de to variablene x_2 og x_4 var frie. Men vi kunne også ha valgt å la x_1 og x_3 være frie, som vi skal se nå.

Vi hadde forenklet systemet til følgende:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - 7x_4 + 6 \\ x_3 = 2x_4 + 5 \end{cases}$$

Vi kan løse den andre ligningen her for x_4 og få:

$$x_4 = \frac{x_3 - 5}{2}$$

Deretter kan vi sette inn dette i den første ligningen og løse for x_2:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-x_1 - 7x_4 + 6}{3} \\ &= \frac{-x_1 - \frac{7}{2}(x_3 - 5) + 6}{3} = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{7}{6}x_3 + \frac{47}{6} \end{aligned}$$

Hvis vi nå lar $x_1 = s$ og $x_3 = t$, så har vi følgende generelle løsning:

$$\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = -\frac{1}{3}s - \frac{7}{6}t + \frac{47}{6} \\ x_3 = t \\ x_4 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Eller på vektorform:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{47}{6} \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{6} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Dette ser annerledes ut enn det vi fikk i eksempel 2.13, men det beskriver nøyaktig de samme løsningene. (Du kan for eksempel sjekke at hvis vi her setter $s = -1$ og $t = 7$, så får vi den samme løsningen som da vi valgte $x_2 = 0$ og $x_4 = 1$ i eksempel 2.13). △

Lineære ligninger med komplekse tall

Et lineært likningssystem med komplekse koeffisienter og løsning, kan løses med gausseliminasjon på samme måte som i det reelle tilfellet, men det er ikke fullt så lett å visualisere. Vi tar to eksempler.

Eksempel 2.16. Vi løser likningssystemet

$$\begin{aligned} (1-i)z + 3w &= 2 - 3i \\ iz + (1+2i)w &= 1 \end{aligned}$$

som har totalmatrise

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-i & 3 & 2-3i \\ i & 1+2i & 1 \end{array}\right].$$

Vi ønsker å kvitte oss med i-en til venstre i den andre raden. Den første raden ganget med $\frac{i}{1-i}$ er

$$\left[\begin{array}{cc|c} i & \frac{3i}{1-i} & \frac{3+2i}{1-i} \end{array}\right].$$

Vi trekker dette fra den andre raden og erstatter den andre raden med resultatet:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-i & 3 & 2-3i \\ 0 & 1+2i-\frac{3i}{1-i} & 1-\frac{3+2i}{1-i} \end{array}\right].$$

Jeg tror vi ganger den andre raden med $1-i$ for å rydde litt:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-i & 3 & 2-3i \\ 0 & 3-2i & -2-3i \end{array}\right]$$

Vi er nå klare for å beregne w og z:

$$\begin{aligned} w &= \frac{-2-3i}{3-2i} = \frac{-2-3i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = -i \\ z &= \frac{2-3i-3(-i)}{1-i} = 1+i \end{aligned}$$

△

Eksempel 2.17. Vi ser på systemet

$$\begin{aligned} 3x + y - 2z &= -1 + i \\ x - iy \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Vi bytter rekkefølge på ligningene, slik at den utvidede matrisen til systemet blir:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1+i \end{array}\right]$$

Vi legger til -3 ganger første rad til andre rad og får den radekvivalente matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1+3i & -2 & -1+i \end{array}\right]$$

Så skalerer vi andre rad ved å gange med $\frac{1-3i}{10}$ og får den radekvivalente matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1+3i}{5} & \frac{1+2i}{5} \end{array}\right]$$

Så tar vi i ganger andre rad og legger til første rad, og får matrisen på redusert trappeform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-3-i}{5} & \frac{-2+i}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-1+3i}{5} & \frac{1+2i}{5} \end{array}\right]$$

Vi lar $z = t$ være fri variabel, og får da at generell løsning blir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2+i}{5} \\ \frac{1+2i}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} \frac{3+i}{5} \\ \frac{1-3i}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

△

De fleste teoremer i dette emnet er gyldige uansett om vi opererer i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Det finnes noen unntak, som vi skal komme tilbake til i slutten av pensum.