Kapittel 5

Lineær uavhengighet

Litt repetisjon

La $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ være en samling med vektorer i $\mathbb{R}^m$ (eller i $\mathbb{C}^m$). Husk at det lineære spennet $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ er samlingen av alle lineærkombinasjoner av $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Altså alle vektorer på formen

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

der a_i er tall.

For eksempel er det lineære spennet til vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

alle vektorer på formen

$$a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

altså alle punkter i xy-planet. La i tillegg

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Spennet til vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er også alle vektorer på formen

$$\begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

slik at

$$\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}.$$

Av forskjellige grunner er $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er en bedre beskrivelse av xy-planet enn $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Den viktigste grunnen er kanskje at $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ inneholder en vektor som strengt tatt er overflødig. Vi vil komme tilbake til dette når vi skal introdusere begrepet *basis*.

Siden $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, er $\mathbf{v}_3$ en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Vi skriver

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

som kalles en *lineær avhengighetsrelasjon*, og vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sies å være *lineært avhengige*.

Definisjonen av lineær uavhengighet

Vi begynner dette avsnittet med den formelle definisjonen av lineær uavhengighet. Husk at nullvektoren $\mathbf{0}$ i $\mathbb{R}^m$ eller $\mathbb{C}^m$ er vektoren med alle elementer lik 0.

Definisjon. Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ er *lineært uavhengige* dersom likningen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

ikke har andre løsninger enn den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. I motsatt tilfelle kalles de *lineært avhengige.* △

Altså er en mengde med vektorer lineært uavhengig dersom det å velge alle vekter lik null er den eneste måten å uttrykke 0-vektoren som en lineærkombinasjon av vektorene.

Eksempel 5.1. La

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\4\end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^3$. Ligningen

$$\mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_2 x_2 = \mathbf{0}$$

medfører at $3x_1 = 0$ og $4x_2 = 0$, altså $x_1 = x_2 = 0$, så den har bare den trivielle løsningen. Dermed er $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ lineært uavhengige. △

Eksempel 5.2. La $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være følgende tre vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix}4\\4\\9\end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Disse vektorene oppfyller følgende likhet (det er lett å sjekke):

$$\mathbf{u} + 5 \cdot \mathbf{v} - 9 \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

og er derfor lineært avhengige. △

Eksempel 5.3. La $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være følgende tre vektorer i $\mathbb{C}^3$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix}4i\\4i\\9i\end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix}-i\\-i\\0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Disse vektorene oppfyller følgende likhet:

$$-i\mathbf{u} + 5i \cdot \mathbf{v} - 9 \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

og er derfor lineært avhengige. △

Teorem 5.4. *Enhver mengde av vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ som inneholder nullvektoren, er lineært avhengig.*

Bevis. Anta at $\mathbf{v_t} = \mathbf{0}$. Velg $a_t = 1$ og $a_j = 0$ for $j \neq t$. Da er $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v_i} = 0$, og mengden er derfor lineært avhengig. $\square$

Lineær uavhengighet for to vektorer

Hvis vi ser på bare to vektorer, er det ikke vanskelig å sjekke om de er lineært uavhengige eller ikke.

Eksempel 5.5. La

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -12 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Vi har $\mathbf{v}_1 = 2 \cdot \mathbf{v}_2$, og får:

$$1 \cdot \mathbf{v}_1 - 2 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

Vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er altså lineært avhengige. $\triangle$

I dette eksempelet hadde vi at den ene vektoren kunne skrives som et tall ganger den andre, og ut fra det fant vi at vektorene var lineært avhengige. Dette holder generelt.

Teorem 5.6. *To vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, begge ulik $\mathbf{0}$, er lineært uavhengige hvis og bare hvis $\mathbf{u} \neq c\mathbf{v}$, for en skalar $c \neq 0$.*

Bevis. Påstanden i teoremet kan omformuleres slik: Vektorene er lineært *avhengige* hvis og bare hvis $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$, for en skalar $c \neq 0$. Vi viser dette.

Anta først at $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært avhengige. Da finnes to tall a og b slik at

$$\mathbf{u} \cdot a + \mathbf{v} \cdot b = \mathbf{0}$$

og minst én av a og b er ulik 0. Hvis $a = 0$, har vi $\mathbf{v} \cdot b = \mathbf{0}$, og dermed, ved å dele på b (som er ulik 0) får vi $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dette er en motsigelse. Så $a \neq 0$. Av samme grunn må vi ha $b \neq 0$.

Dermed får vi

$$\mathbf{u} = -\frac{b}{a}\mathbf{v}.$$

og siden $b \neq 0$ har vi altså at $\mathbf{u}$ er en ikke-null skalar ganger $\mathbf{v}$.

Nå viser vi den motsatt implikasjonen. Anta derfor $\mathbf{u} = c \cdot \mathbf{v}$ for en skalar c, da får vi:

$$\mathbf{u} \cdot 1 + \mathbf{v} \cdot (-c) = \mathbf{0}.$$

og det betyr at vektorene er lineært avhengige. $\square$

Hvis vi ser på vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$, sier altså teoremet at to vektorer er lineært uavhengige hvis og bare hvis de ikke ligger på en rett linje gjennom origo. Med andre ord: de er lineært uavhengige hvis og bare hvis de utspenner et plan.

Hvordan sjekke lineær uavhengighet?

For å sjekke om vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige, trenger vi å finne løsninger

$$\mathbf{v}_1 \cdot x_1 + \mathbf{v}_2 \cdot x_2 + \cdots + \mathbf{v}_n \cdot x_n = \mathbf{0}$$

Denne likningen kan vi selvfølgelig løse på vanlig måte, ved å gausseliminere totalmatrisen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

Eksempel 5.7. Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 8 \\ 31 \\ 12 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Vi setter opp totalmatrisen for likningssystemet

$$\mathbf{u} \cdot x + \mathbf{v} \cdot y + \mathbf{w} \cdot z = \mathbf{0},$$

og gausseliminerer den:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 8 & 0 \\ 9 & 7 & 31 & 0 \\ 3 & 2 & 12 & 0 \\ 3 & 4 & 22 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi kunne fortsatt videre til redusert trappeform, men allerede her er det tydelig at vi får kun én løsning: $x = y = z = 0$. Dette betyr at vektorene $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige. $\triangle$

Det essensielle vi trenger å få ut av gausseliminasjonen for å sjekke lineær uavhengighet, er om det blir noen frie variabler eller ikke. Merk også at vi ikke egentlig trenger å ta med høyresidevektoren i gausseliminasjonen. I og med at det er bare 0-er der fra begynnelsen av, kan det aldri bli noe annet enn 0 der, uansett hvilke radoperasjoner vi utfører. Altså er påstand 1 og 4 i det følgende teoremet ekvivalente.

Teorem 5.8. *La A være en matrise. Følgende påstander er ekvivalente:*

1. *Kolonnene i A er lineært uavhengige.*
2. *Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bare den trivielle løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*
3. *Vi får ingen frie variabler når vi løser $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*
4. *Når vi gausseliminerer A, får vi et pivotelement i hver kolonne.*

Bevis. Påstand 2 er bare en omskrivning av definisjonen av lineær uavhengighet til en matriselikning. Påstand 3 forklarer hvordan vi kan se at likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ikke har mer enn én løsning (husk at vi vet at den alltid har $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ som løsning). Påstand 4 er en omformulering av påstand 3, der vi utnytter at vi vet at den siste kolonnen i totalmatrisen uansett bare består av 0-er, så vi trenger ikke ta den med i gausseliminasjonen. $\square$

Teorem 5.8 gir oss en grei metode for å sjekke lineær uavhengighet. Hvis vi har vektorer

$$\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2, \ \ldots, \ \mathbf{v}_n,$$

kan vi finne ut om de er lineært uavhengige på denne måten:

1. Lag en matrise $A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$ med disse vektorene som kolonner.
2. Gausseliminer A til trappeform.
3. Hvis hver kolonne inneholder et pivotelement, er vektorene lineært uavhengige. Ellers er de lineært avhengige.

Eksempel 5.9. Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Vi gausseliminerer matrisen $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 10 & 7 & 6 \\ 5 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siste kolonne har ikke noe pivotelement. Dermed er $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ lineært avhengige. △

Eksempel 5.10. Hva med disse?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 8i \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \\ -2i & 8i & -5 \end{bmatrix}$$

er ferdig gausseliminert, bare i motsatt rekkefølge av hva du er vant med, og har pivotelement i hver kolonne. Dermed er $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ lineært uavhengige. △

Eksempel 5.11. Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 14 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

For å sjekke dette kan vi gausseliminere denne matrisen:

$$\begin{bmatrix} 8 & 14 & 3 & 7 \\ 7 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Men vi trenger ikke egentlig å utføre gausseliminasjonen. Vi ser med en gang at uansett hva som skjer, så kan vi ikke få mer enn tre pivotelementer (ett i hver rad). Dermed kan det ikke bli pivotelementer i alle de fire kolonnene, så vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ er lineært avhengige. △

Vi trenger altså ikke alltid å gausseliminere for å finne ut om vektorer er lineært uavhengige eller ikke. Noen ganger kan vi se det på enklere måter.

Vi lister opp noen forskjellige betingelser som kan være nyttige å se etter for å oppdage at vektorer er lineært *avhengige*.

Teorem 5.12. *Gitt n vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ i $\mathbb{R}^m$ eller $\mathbb{C}^m$. Hvis*

1. *en av vektorene er en lineærkombinasjon av de andre, eller*
2. *$n > m$,*

så er vektorene lineært avhengige.

Bevis. Anta først at én vektor $\mathbf{v}_k$ er en lineærkombinasjon av de andre:

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i \neq k} a_i \mathbf{v}_i$$

Da kan vi sette $a_k = -1$ og få:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Her har vi skrevet nullvektoren som en ikketriviell lineærkombinasjon av vektorene våre (vi vet ikke hva alle a_i-ene er, men vi vet i hvert fall at én av dem, a_k, ikke er 0). Det betyr at vektorene er lineært avhengige.

Anta nå at $n > m$ Akkurat som i eksempel 5.11 får vi her at når vi gausseliminerer matrisen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix},$$

så får vi maksimalt m pivotelementer (ett i hver rad), og vi trenger n pivotelementer (ett i hver kolonne) for at vektorene skal være lineært uavhengige. Siden $n > m$, er det umulig, så da er vektorene lineært avhengige. □

Den første betingelsen i teorem 5.12 er ikke bare tilstrekkelig for å få lineær avhengighet, den er ekvivalent med at vektorene er lineært avhengige. Vi viser dette også.

Teorem 5.13. *Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis ingen av dem kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre.*

Bevis. Påstanden i teoremet er det samme som å si at vektorene er lineært avhengige hvis og bare hvis en av dem kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre.

I teorem 5.12 viste vi at dersom en av vektorene er en lineærkombinasjon av de andre, så er de lineært avhengige. Det gjenstår å vise at dersom vektorene er lineært avhengige, så er en av dem en lineærkombinasjon av de andre.

Anta at vektorene er lineært avhengige, altså at vi har

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

der minst én av a_i-ene er ulik 0. Velg en k slik at $a_k \neq 0$. Da har vi:

$$a_k \mathbf{v}_k = \sum_{i \neq k} (-a_i) \mathbf{v}_i$$

Siden $a_k \neq 0$ kan vi dele på a_k og få:

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i \neq k} \frac{-a_i}{a_k} \cdot \mathbf{v}_i$$

Dermed er vektoren $\mathbf{v}_k$ en lineærkombinasjon av de andre vektorene i listen. □

Like mange vektorer som dimensjonen

Til slutt ser vi på hva vi kan si om lineær uavhengighet hvis vi ser på n vektorer i $\mathbb{R}^n$. Nå har vi altså like mange vektorer som dimensjonen til rommet vektorene bor i.

Hvis vi har to ulike vektorer i $\mathbb{R}^2$, så kan vi skille mellom følgende to tilfeller:

1. Minst én av vektorene er ulik $\mathbf{0}$, og vektorene ligger på samme linje. Da utspenner de denne linjen, og de er lineært avhengige.
2. Vektorene ligger ikke på samme linje, de peker altså i hver sin retning. Da utspenner de hele planet, og de er lineært uavhengige.

Hvis vi har tre ulike vektorer i $\mathbb{R}^3$, så kan vi skille mellom tre tilfeller:

1. Vektorene ligger på samme linje. Da utspenner de denne linjen, og de er lineært avhengige.
2. Vektorene ligger ikke på samme linje, men det finnes et plan i $\mathbb{R}^3$ som inneholder alle tre. Da utspenner de dette planet, og de er lineært avhengige.
3. Vektorene ligger ikke i samme plan. Da utspenner de hele $\mathbb{R}^3$, og de er lineært uavhengige.

Generelt har vi at n vektorer i $\mathbb{R}^n$ enten er lineært avhengige og utspenner en mengde som er mindre enn $\mathbb{R}^n$, eller så er de lineært uavhengige og utspenner hele $\mathbb{R}^n$.

Teorem 5.14. *Hvis vi har n vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ i $\mathbb{R}^n$, så er de lineært uavhengige hvis og bare hvis de utspenner hele $\mathbb{R}^n$, altså hvis og bare hvis*

$$\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} = \mathbb{R}^n.$$

Bevis. La

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

være $n \times n$-matrisen med vektorene våre som kolonner. Vi vet at vektorene er lineært uavhengige hvis og bare hvis vi får pivotelementer i alle kolonner når vi gausseliminerer A. Men siden A er kvadratisk, er dette det samme som at vi får pivotelementer i alle rader. Det er igjen ekvivalent med at

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

har løsning for alle vektorer $\mathbf{b}$ i $\mathbb{C}^n$, som er det samme som at kolonnene i A utspenner $\mathbb{R}^n$. □

Vi formulerte teorem 5.14 for $\mathbb{R}^n$. Akkurat samme teorem og bevis holder for $\mathbb{C}^n$.

Eksempel 5.15. Hva med vektorene

$$\begin{bmatrix} 1-i \\ i \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1+2i \end{bmatrix} \quad ?$$

Vi løser likningssystemet

$$\begin{aligned} (1-i)z + 3w &= 0 \\ iz + (1+2i)w &= 0 \end{aligned}$$

som har totalmatrise

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-i & 3 & 0 \\ i & 1+2i & 0 \end{array}\right].$$

Gausseliminasjon gir

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-i & 3 & 0 \\ 0 & 3-2i & 0 \end{array}\right]$$

som gir $z = w = 0$, og følgelig er vektorene lineært uavhengige. De utspenner dermed også $\mathbb{C}^2$. △