

# Anbefalte oppgaver 6

## Oppgaver til kapittel 8

1. La  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  være funksjonen gitt ved formelen  $f(z) = z^2$ . Er  $f$  injektiv, surjektiv, bijektiv?

2. Finn ut om funksjonen  $T$  er en lineærtransformasjon mellom reelle vektorrom. Hvis den er det: Finn standardmatrisen til  $T$ , regn ut  $\ker T$  og  $\operatorname{im} T$ , og finn ut om  $T$  er injektiv, og om den er surjektiv.

a)  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tan x \\ e^y \end{bmatrix}$

b)  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x + y$

c)  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x + y - 1$

d)  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$

e)  $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x - 5y + 4z \\ y - 6z \end{bmatrix}$

f)  $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x + y \\ y + z \\ z + w \end{bmatrix}$

3. La  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  være en lineærtransformasjon gitt

ved  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y \\ -x + 3y \\ 3x - 2y \end{bmatrix}$ . Finn en vektor  $\mathbf{v}$  slik at

$$T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

4. La  $\mathcal{B} = \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$  og  $\mathcal{C} = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$  være basiser for  $\mathbb{R}^2$ . Finn matrisene  $A$  og  $B$ , slik at  $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = A[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$  og  $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = B[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$  for alle  $\mathbf{x}$  i  $\mathbb{R}^2$ .

5.

a) Finn en basis  $\mathcal{B}$  for  $\mathcal{P}_2$  slik at

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \frac{p''(0)}{2} \end{bmatrix}$$

er koordinatene til et andregradspolynom  $p$ .

b) Finn en basis  $\mathcal{C}$  for  $\mathcal{P}_2$  slik at

$$[p]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$$

er koordinatene til et andregradspolynom  $p$ .

c) La  $p$  være gitt ved  $p(x) = x^2$ . Finn koordinatene til  $p$  med hensyn på henholdsvis  $\mathcal{B}$  og  $\mathcal{C}$ .

d) Finn lineærtransformasjoner som oversetter mellom disse basisene, altså

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{og} \quad S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

slik at

$$T([p]_{\mathcal{B}}) = [p]_{\mathcal{C}} \quad \text{og} \quad S([p]_{\mathcal{C}}) = [p]_{\mathcal{B}}$$

for alle polynomer  $p$ . Sjekk at  $T$  og  $S$  gir riktig resultat for koordinatene du fant del c).

6. La  $T_{\theta}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  være lineærtransformasjonen som roterer vektorer med vinkelen  $\theta$ .

a) Finn standardmatrisen for  $T_{\theta}$ .

b) Bevis den trigonometriske likningen

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta).$$

Hint: Sammenlign  $T_{2\theta}$  og  $T_{\theta} \circ T_{\theta}$ .

7. La  $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  være en lineærtransformasjon fra  $\mathbb{C}^n$  til seg selv, og la  $A$  være standardmatrisen til  $T$ . Vis at følgende påstander er ekvivalente:

- $A$  er inverterbar.
- Kolonnene i  $A$  er lineært uavhengige.
- Kolonnene i  $A$  utspenner  $\mathbb{C}^n$ .
- $T$  er injektiv.
- $T$  er surjektiv.
- $T$  er en isomorfi.

8. La  $U, V$  og  $W$  være endeligdimensjonale vektorrom, og anta at vi har lineærtransformasjoner

$$U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W$$

slik at sammensetningen  $S \circ T$  er en isomorfi.

a) Kan du ut fra dette konkludere med om  $T$  og  $S$  er injektive og/eller surjektive?

b) Hva kan du si om dimensjonene til  $U, V$  og  $W$ ?

## Eksamensoppgave

Vår 2011: Oppgave 5