**NTNU**

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

# Eksamensoppgave i **TMA4110 Matematikk 3**

**Faglig kontakt under eksamen:** Gereon Quick[a], Morten Solberg[b]

**Tlf:** [a] mobil Gereon , [b] mobil Morten

**Eksamensdato:** 11. desember 2020

**Eksamenstid (fra–til):** 09:00–13:00

**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:** A

**Målform/språk:** bokmål

**Antall sider:** 15

**Antall sider vedlegg:** 0

**Kontrollert av:**

| **Informasjon om trykking av eksamensoppgave** | |
|---|---|
| **Originalen er:** | |
| **1-sidig** ☐ | **2-sidig** ☒ |
| **sort/hvit** ☒ | **farger** ☐ |
| **skal ha flervalgskjema** ☐ | |

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

**Kommentar:** Først kommer 4 flervalgsoppgaver og en oppgave som kun krever et tallsvar som teller hver 5 poeng. Så kommer 5 vanlige oppgaver som teller hver 15 poeng og som besvares ved å laste opp en pdf.

**Flervalgsoppgaver:**

**Oppgave 1** Vi ser på vektormengden $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ med (**Kommentar:** hver kandidat får én av variantene)

Variante 1:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Variante 2:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Hvor mange elementer kan en lineært uavhengig delmengde i $S$ maksimalt ha?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

**Løsningsforslag:**

Vi ser på matrisen $A$ med vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ som kolonner og bruker Gauss-eliminasjon for å redusere den på redusert trappeform.

**Variante 1:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 11 & -5 \\ 3 & 1 & 12 & -1 \\ 7 & 12 & -1 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 11 & -5 \\ 0 & 7 & -21 & 14 \\ 0 & 26 & -78 & 52 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 11 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De første to kolonnene er pivotkolonner. Vi kan dermed velge $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ som en lineær uavhengig delmengde. Den reduserte trappeformen viser oss også hvordan kolonnene kan skrives som lineærkombinasjoner av hverandre:

$$\mathbf{v}_3 = 5\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 \text{ og } \mathbf{v}_4 = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2.$$

**Variante 2:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & -5 & -1 \\ 7 & 14 & -2 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 7 & 7 & 14 \\ 0 & 28 & 26 & 52 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 7 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

De første tre kolonnene er pivotkolonner. Vi kan dermed velge $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ som en lineær uavhengig delmengde. Den reduserte trappeformen viser oss igjen hvordan vi kan skrive $\mathbf{v}_4$ som en lineærkombinasjon av den andre vektorene:

$$\mathbf{v}_4 = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3.$$

**Oppgave 2** Vi ser på ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $A$ er en reell $3 \times 3$-matrise og $\mathbf{b}$ er en vektor i $\mathbb{R}^3$. Anta vi vet at den generelle løsningen til systemet er på formen: (**Kommentar:** Hver kandidat får kun én av de fire mulighetene.)

$$A)\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ B)\ \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C)\ \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ D)\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hva kan vi si da om $A$ og $\mathbf{b}$?

Svaralternativene:

a) $\dim \operatorname{Null} A = 2$ og $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

b) $\dim \operatorname{Null} A = 2$ og $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

c) $\dim \operatorname{Col} A = 2$ og $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

d) $\dim \mathrm{Col}\ A = 2$ og $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

**Løsningsforslag:**

A) Alternativet a) er riktig, fordi løsningen har to frie variabler, og $\mathbf{b}$ kan ikke være nullvektoren fordi $\mathbf{0}$ ikke løser systemet.

B) Alternativet b) er riktig, fordi løsningen har to frie variabler, og $\mathbf{b}$ må være nullvektoren fordi $\mathbf{0}$ løser systemet.

C) Alternativet c) er riktig, fordi løsningen har én fri variabel som betyr at $A$ har to pivotkolonner og $\dim \mathrm{Col}\ A = 2$, og $\mathbf{b}$ må være nullvektoren fordi $\mathbf{0}$ løser systemet.

D) Alternativet d) er riktig, fordi løsningen har én fri variabel som betyr at $A$ har to pivotkolonner og $\dim \mathrm{Col}\ A = 2$, og $\mathbf{b}$ kan ikke være nullvektoren fordi $\mathbf{0}$ ikke løser systemet.

## Oppgave 3

La $A$ være en reell $3 \times 2$-matrise med lineært uavhengige kolonner og $\mathbf{b}$ være en vektor i $\mathbb{R}^3$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har en løsning. La $\hat{\mathbf{x}}$ være vektoren slik at vektoren $\mathbf{w} = \mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}$ har den minimale lengden. Hvilket underrom er det ortogonale komplementet til $\mathrm{Span}\{\mathbf{w}\}$?

a) Null $A$

b) Col $A$

c) Null $A^T$

d) Col $A^T$.

**Løsningsforslag:**

Vektorene i kolonnerommet Col $A$ er alltid ortogonal til $\mathbf{w}$ fordi det er slik vi velger $\hat{\mathbf{x}}$.

Mer presist: Fordi kolonnene i $A$ er lineært uavhengige, er matrisen $A^T A$ inverterbar. Vektoren $\hat{\mathbf{x}}$ er dermed den unike løsningen til

$$A^T(A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

Det betyr at $\mathbf{w}$ er i Null $A^T$. Alle vektorer som er ortogonal til Null $A^T$ er dermed også ortogonal til $\mathbf{w}$. Med andre ord vi har alltid

$$\text{Col } A = (\text{Null } A^T)^\perp \subseteq (\text{Span}\{\mathbf{w}\})^\perp.$$

Fordi $\dim \text{Col } A = 2$ og $\dim \text{Span}\{\mathbf{w}\} = 1$, har vi Col $A = (\text{Span}\{\mathbf{w}\})^\perp$.

**Oppgave 4** La $x(t)$ og $y(t)$ være to kontinuerlig deriverbare reelle funksjoner som oppfyller differensialligningene

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3x(t) - (3+a)y(t) \text{ og} \\ y'(t) &= (3-a)x(t) - 3y(t). \end{aligned}$$

For hvilken av de følgende initialverdiene ligger vektorene $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ på en linje i $\mathbb{R}^2$ for alle $t$?

**Variasjon:** Hver kandidat får oppgaven med én av verdiene $a = -2, -1, 1, 2, 4$.

Svaralternativene:

*a)* $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, *c)* $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}$, *d)* $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, *e)* $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

**Løsningsforslag:** Dersom $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$ er den generelle løsningen til systemet (og det skjer når vi har to reelle egenverdier $\lambda_1 \neq \lambda_2$), så ligger punktene $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ på en linje for alle $t$ dersom enten $c_1 = 0$ eller $c_2 = 0$ (og ikke begge lik 0 samtidig). Dette skjer når initialverdivektor $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$ er en egenvektor for matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -(3+a) \\ 3-a & -3 \end{bmatrix}$$

knyttet til systemet. Vi må altså finne alle $\lambda$ som oppfyller $(3-\lambda)(-3-\lambda) + (3+a)(3-a) = 0$. Vi løser denne ligningen:

$$0 = \lambda^2 - 9 + (9 - a^2) \iff \lambda^2 = a^2 \iff \lambda = \pm a.$$

Fordi alle verdiene for $a$ er ulik 0, har vi to forskjellige reelle egenverdier $\lambda = a$ og $\lambda = -a$.

For $\lambda = a$ får vi en egenvektor ved å løse systemet

$$\begin{bmatrix} 3-a & -(3+a) \\ 3-a & -3-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3-a & -(3+a) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det gir oss egenvektor $\begin{bmatrix} 3+a \\ 3-a \end{bmatrix}$ til egenverdi $\lambda = a$.

Verdiene for $a$ gir oss altså egenvektorene

$$\begin{aligned}
a = -2 : \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ for matrisen } \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \qquad & a = -1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ for matrisen } \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \\
a = 1 : \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ for matrisen } \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad & a = 2 : \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ for matrisen } \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \\
a = 4 : \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ for matrisen } \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Det gir oss de riktige svaralternativene avhengig av verdiene for $a$.

For $\lambda = -a$ får vi en egenvektor ved å løse systemet

$$\begin{bmatrix} 3+a & -(3+a) \\ 3-a & -3+a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3+a & -(3+a) \\ 3-a & -(3-a) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3+a & -(3+a) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det gir oss egenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ til egenverdi $\lambda = -a$. Men denne vektoren er ikke at svaralternativ.

**Kommentar:** Den neste oppgaven krever kun et tallsvar.

**Oppgave 5** For hvilket reelt tall $a$ er funksjonen $y(t) = te^{nt}$ en løsning til differensialligningen

$$y''(t) + ay'(t) + n^2 y(t) = 0?$$

**Variasjon:** Hver kandidat får én av verdiene $n = 1, 2, 3, 5$.

Korrekt svar: $a = -2n$

**Løsningsforslag:**

Vår klassifikasjon for løsningene til homogene andre ordens differensialligninger sier at faktoren $t$ foran $e^{nt}$ kun dykker opp når den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + a\lambda + n^2 = 0$ kun har én reell løsning. Og denne løsningen må være lik $n$. Dette skjer nøyaktig når $a = -2n$ fordi da får vi

$$\lambda^2 - 2n\lambda + n^2 = (\lambda - n)^2.$$

**Kommentar:** Nå kommer vanlige oppgave som besvares ved å laste opp en pdf.

## Oppgave 6

For å simulere proteinene som danner taggene til koronaviruset SARS-CoV-2 bruker forskere overgangsalgoritmer (for eksempel i prosjektet Folding@Home ved Stanford).

De trenger din hjelp til å teste om algoritmen de har implementert fungerer som den skal, og har derfor forenklet utregningene slik at du kan gjøre dem for hånd.

Proteinet S kan innta tre ulike tilstander, A, B og C. Hvert mikrosekund, altså hvert $10^{-6}$-sekund, kan den bytte tilstand.

- Gitt at S er i tilstand A, og man venter et mikrosekund så er det: $(x-1)/x$ sannsynlighet for at S fortsatt er i tilstand A, $1/x$ sannsynlighet for at S går til tilstand B, 0 sannsynlighet for at S går til tilstand C.
- Gitt at S er i tilstand B, og man venter et mikrosekund så er det: 0 sannsynlighet for at S går til A, $(y-1)/y$ sannsynlighet for at S fortsatt er i tilstand B, $1/y$ sannsynlighet for at S går til tilstand C.
- Gitt at S er i tilstand C, og man venter et mikrosekund så er det: $1/3$ sannsynlighet for at S går til A, $1/3$ sannsynlighet for at S går til tilstand B, $1/3$ sannsynlighet for at S fortsatt er i tilstand C.

**Variasjon:** Hver kandidat får én av verdiene for $(x, y)$: $(7, 2)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$.

**a)** Finn den stokastiske matrisen M som representerer hvordan S endrer tilstander for hvert mikrosekund.

**Løsningsforslag:**

Prosessen kan beskrives ved den stokastiske matrisen

$$M = \begin{bmatrix} \frac{x-1}{x} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x} & \frac{y-1}{y} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{y} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

**b)** Er $M$ regulær?

**Løsningsforslag:**

Dette er en regulær stokastisk matrise fordi $M^2$ er en matrise hvor elementene er strengt større enn 0:

$$M^2 = \begin{bmatrix} \frac{(x-1)^2}{x^2} & \frac{x-1}{x} + \frac{1}{3y} & \frac{x-1}{3x} + \frac{1}{9} \\ \frac{x-1}{x^2} + \frac{y-1}{xy} & \frac{(y-1)^2}{y^2} + \frac{1}{3y} & \frac{1}{3x} + \frac{y-1}{3y} + \frac{1}{9} \\ \frac{1}{xy} & \frac{y-1}{y^2} + \frac{1}{3y} & \frac{1}{3y} + \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

**c)** Gitt at S ligger i tilstand A, hva er sannsynligheten for at S ligger i tilstand B to (2) mikrosekunder senere?

**Løsningsforslag:**

Vi finner sannsynligheten som andre element in den første kolonnen i $M^2$: $\frac{x-1}{x^2} + \frac{y-1}{xy}$.

**d)** Forskerene simulerer at proteinet S får endre tilstand fritt, slik det vil, i et helt sekund. Estimer sannsynligheten for at S er i hver av de 3 tilstandene på slutten av sekundet. Hvilken tilstand er det mest sannsynlig at S vil være i?

**Løsningsforslag:**

Et sekund består av en million mikrosekunder. Det betyr at vi er interesserte i tilstanden til S i det lange løp. Vi kan altså beregne likevektsvektoren $\mathbf{v}$ til $M$. Derfor vil vi løse systemet med totalmatrisen

$$M - I_3 = \begin{bmatrix} \frac{x-1}{x} - \frac{x}{x} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x} & \frac{y-1}{y} - \frac{y}{y} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{y} & \frac{1}{3} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x} & -\frac{1}{y} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{y} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{y} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{y} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{y} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette viser at koordinatene $v_1, v_2, v_3$ til $\mathbf{v}$ oppfyller altså

$$v_2 = \frac{2y}{3} v_3 \text{ og } v_1 = \frac{x}{3} v_3.$$

Det betyr at $\mathbf{v}$ er på formen

$$\mathbf{v} = t \begin{bmatrix} \frac{x}{3} \\ \frac{2y}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I en likevektsvektor er summen av elementene lik 1. Vi får altså

$$\mathbf{v} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{x}{3} \\ \frac{2y}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ med } L = \frac{x + 2y + 3}{3}.$$

Nå må vi se hvilken av koordinatene til $\mathbf{v}$ er størst. Dette avhenger av verdiene av $x$ og $y$ vi begynte med. For $x = 5$ eller $x = 7$ og $y = 2$ er svaret $A$. For $(x, y)$ et av parene $(5, 3)$, $(4, 3)$ eller $(3, 4)$ er svaret $B$.

**Oppgave 7** La $u$ og $v$ være de komplekse tallene $u = 3 + 3i$ og $v = 2 - i$.

**a)** Vis at hvis man betrakter $\mathbb{C}$ som et reelt vektorrom, så danner $\mathcal{B} = (u, v)$ en basis for $\mathbb{C}$.

**Løsningsforslag:** Vi må vise at $u$ og $v$ er både lineært uavhengige og utspenner hele rommet.

Vi viser først at $u$ og $v$ utspenner $\mathbb{C}$: La $z$ være et komplekst tall. Vi må finne reelle tall $x$ og $y$ slik at $z = x \cdot u + y \cdot v$. Vi skriver $z = a + bi$ med reelle tall $a$ og $b$ og setter inn for $u$ og $v$. Da blir ligningen vi må løse for $x$ og $y$ til

$$a + bi = x(3 + 3i) + y(2 - i) = (3x + 2y) + (3x - y)i.$$

Fordi to komplekse tall er like hvis og bare hvis deres real- og imaginærdeler er like gir det oss ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= a \\ 3x - y &= b. \end{aligned}$$

Matrisen som hører til dette systemet er $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. For å løse systemet kan vi for eksempel beregne $A^{-1}$ etter at vi har observert at $A$ er inverterbar, for eksempel ved å sjekke at $\det A = -9 \neq 0$ (vi gjør det på denne måten, fordi vi skal møte slike systemer flere ganger i denne oppgaven). Vi kan beregne $A^{-1}$ for hånd eller bruke en formel for å invertere $2 \times 2$-matriser og kommer fram til $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$. Nå finner vi $x$ og $y$ ved

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} a + 2b \\ 3a - 3b \end{bmatrix}.$$

Med $x = \frac{a+2b}{9}$ og $y = \frac{3a-3b}{9}$ får vi altså $z = a + bi = xu + yv$.

Nå viser vi at $u$ og $v$ er lineært uavhengige: Anta $x \cdot u + y \cdot v = 0$ for reelle tall $x$ og $y$. Vi har nettopp lært hvordan vi finner $x$ og $y$ for $z = 0$. Nemlig

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi må altså ha $x = 0$ og $y = 0$. (Vi legger merke til at $(u, v)$ er en basis korresponderer til at kolonnene i $A$ er lineært uavhengige eller til at $A^{-1}$ eksisterer.)

Alternativt kan vi argumentere: To vektorer er lineært uavhengige hvis og bare hvis det finnes et tall $c$ slik at $u = c \cdot v$ (eller omvendt: et tall $d$ slik at $v = d \cdot u$). Men

$$\frac{u}{v} = \frac{3 + 3i}{2 - i} = \frac{3 + 9i}{5}.$$

Dette er ikke et reelt tall. Dermed er $u$ og $v$ lineært uavhengige i det *reelle* vektorrommet $\mathbb{C}$. Dersom vi allerede vet at dimensjonen til $\mathbb{C}$ som et reelt vektorrom er lik 2, så vet vi at $(u, v)$ danner en basis for $\mathbb{C}$ som et *reelt* vektorrom.

**b)** Forklar hvorfor $\mathcal{B}$ ikke er en basis for $\mathbb{C}$ tenkt på som et komplekst vektorrom.

**Løsningsforslag:**

I det komplekse vektorrommet $\mathbb{C}$ er $u$ og $v$ lineært avhengige vektorer fordi vi har

$$u = c \cdot v \text{ med } c = \frac{3+9i}{5}.$$

Merk også at som et komplekst vektorrom har $\mathbb{C}$ dimensjon 1. Det betyr at alle basiser består av kun én vektor.

**c)** Finn løsningene til ligningen

$$z^5 + 4z = 0$$

og beregn deres koordinater med hensyn på basisen $\mathcal{B}$ der vi oppfatter $\mathbb{C}$ som et reelt vektorrom.

**Løsningsforslag:**

Vi beregner først løsningene

$$z^5 + 4z = 0 \iff z(z^4+4) = 0 \iff z = 0 \text{ eller } z^4 + 4 = 0.$$

Vi får altså løsningene $z_0 = 0$, $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$, $z_3 = -1+i$ og $z_4 = -1-i$. For å oppgi dem i basisen $\mathcal{B}$ kan vi bruke teknikken vi utviklet i den første deloppgaven. Koordinatene til $z$ med hensyn på basisen $(u, v)$ er tallene $x$ og $y$ slik at $x \cdot u + y \cdot v = z$. Vi får altså (og her ser vi at det var smart å beregne $A^{-1}$ for å løse ligningssystemene)

$$\begin{aligned}
[z_0]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
[z_1]_{\mathcal{B}} &= A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
[z_2]_{\mathcal{B}} &= A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/9 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \\
[z_3]_{\mathcal{B}} &= A^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 \\ -2/3 \end{bmatrix}, \\
[z_4]_{\mathcal{B}} &= A^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

## Oppgave 8

I denne oppgaven vil vi finne eksempler på reelle eller komplekse $2\times 2$-matriser med visse egenskaper. Når du gir et eksempel, må du også forklare hvorfor matrisene har de ønskete egenskapene.

**Kommentar:** Løsningsforslagene nede er ganske lange fordi vi prøver å forklare der som er viktig så godt som mulig. På eksamen holdt det med mye mindre forklaringer.

**a)** Gi et eksempel på to matriser som har samme egenverdier, men ikke er radekvivalente.

**Løsningsforslag:**

Først minner vi om at løsningsmengdene til $2 \times 2$-ligningssystemene som tilsvarer $2 \times 2$-matriser som er radekvivalente er like. Det betyr at vi leter etter matriser hvis ligningssystemer har forskjellige løsningsmengder selv om de har samme egenverdier.

Nå observerer vi at alle matriser som har to lineært uavhengige kolonner er radekvivalente til identitetsmatrisen, og to matriser som er radekvivalente til den samme matrisen — i dette tilfellet identitetsmatrisen — er radekvivalente til hverandre. Det betyr at vi ikke kan finne et eksempel med to matriser som begge har lineært uavhengige kolonner. Derfor prøver vi å bruke noen matriser som har egenverdi 0. For å holde det enkelt velger vi også egenverdi 1. Da kan vi for eksempel bruke eksemplet $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Både $A$ og $B$ har kun egenverdien 0 med algebraisk multiplisitet 2. Men de er ikke radekvivalente fordi det ikke finnes en radoperasjon som transformerer $A$ til $B$.

Et annet eksempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Både $A$ og $B$ har egenverdiene 0 og 1. Men de er ikke radekvivalente, fordi den andre kolonnen i $A$ er lik 0 gang den første kolonnen, mens den andre kolonnen i $B$ er lik 1 gang den første kolonnen. Fordi Gauss-eliminasjon ikke endrer hvordan kolonnene kan skrives som lineærkombinasjoner av hverandre, kan $A$ og $B$ ikke være radekvivalente. Vi kan også forklare det ved å observere at løsningsmengdene til ligningssystemene som hører til henholdsvis $A$ og $B$ er forskjellige.

Et tredje eksempel er gitt ved matrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ som begge har egenverdiene 0 og 1. Men de er ikke radekvivalente fordi løsningsmengdene til de tilsvarende lignigssystemene er forskjellige.

Merk at det finnes uendelig mange andre eksempler vi kan finne på denne måten.

**b)** Gi et eksempel på to matriser som er radekvivalente, men har forskjellige kolonnerom.

**Løsningsforslag:**

Fordi vi ser på $2 \times 2$-matriser, har kolonnerommet enten dimensjon 0, 1 eller 2. Kun nullmatrisen er kolonnerom $\{\mathbf{0}\}$. Men den er ikke radekvivalent til en matrise som ikke er nullmatrisen som vi allerede har observert. På den andre siden har vi $\dim \operatorname{Col} A = 2$ hvis og bare hvis $A$ har to lineært uavhengige kolonner. Dermed er $A$ radekivavalent til identitetsmatrisen. Det betyr at hver matrise $B$ som er radekvivalent til $A$ også er radekvivalent til identitetsmatrisen. Altså er $\dim \operatorname{Col} B = 2$. Med andre ord kolonnene i både $A$ og $B$ utspenner hele planet. Fordi vi ser på $2 \times 2$-matriser, betyr dette betyr at alle matriser med to lineært uavhengige kolonner er radekvivalente men også har like kolonnerom.

Med andre ord: Kun for $\dim \operatorname{Col} = 1$ kan vi altså finne radekvivalente matriser med forskjellige kolonnerom. Kolonnerommet til en matrise har dimensjon 1 når det er utspent av kun én vektor. Vi kan altså for eksempel velge matrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. De er radekvivalente fordi vi får $A$ ved å trekke den første raden i $B$ fra den andre. Men

$$\operatorname{Col} A = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \neq \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{Col} B.$$

Igjen kan vi finne uendelig mange eksempler på denne måten. Men for alle må gjelde dimensjonen til kolonnerommet være lik 1.

**c)** Gi et eksempel på en matrise $A$ som oppfyller ligningen $A^2 + A + I = 0$ der $I$ er $2 \times 2$-identitetsmatrisen og 0 betegner nullmatrisen.

**Løsningsforslag:**

Om $A$ oppfyller ligningen, så oppfyller en egenverdi $\lambda$ til $A$ ligningen

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

For å finne en diagonalmatrise $A$ som oppfyller kravet, holder det altså å velge et komplekst tall $\lambda$ som løser denne ligningen (dvs $\lambda = -\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i \frac{2\pi}{3}}$). Da oppfyller $A = \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ matriseligningen:

$$A^2 + A + I = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Men det finnes også andre matriser $A$ som oppfyller ligningen. Det som er bestemt om $A$ er dens mulige egenverdier (løsningene til $\lambda^2 = \lambda + 1 = 0$). Man kan finne andre $A$ for eksempel ved å sette $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ og så gir ligningen $A^2 + a + I = 0$ fire ligninger for tallene $a, b, c, d$. Disse ligningene har uendelig mange løsninger. Men man kan plukke ganske enkelt noen muligheter. For eksempel er $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ en matrise som også oppfyller ligningen $A^2 + A + I = 0$.

## Oppgave 9

La $\mathbf{u}$ være en kolonnevektor i $\mathbb{R}^n$ (som vi også oppfatter som en $n \times 1$-matrise). Vi antar at $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u} = 1$. Vi skriver $I_n$ for den $n \times n$-identitetsmatrisen og definerer $n \times n$-matrisen $A = I_n - b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T)$ der $\cdot$ betegner matrisemultiplikasjon.

**Variasjon:** Hver kandidat får oppgaven med én av verdiene $b = 2, \ldots, 6$.

**a)** $\mathbf{u}$ er en egenvektor til $A$. Hva er den tilsvarende egenverdien?

**Løsningsforslag:**

Vi beregner $A \cdot \mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} A \cdot \mathbf{u} &= (I - b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T)) \cdot \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} - b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T) \cdot \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} - b\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{u} - b\mathbf{u} \text{ fordi } \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u} = 1 \\ &= (1 - b)\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Altså er $1 - b$ egenverdien for $\mathbf{u}$.

**b)** 1 er en egenverdi for $A$. Finn de tilsvarende egenvektorene.

**Løsningsforslag:**

Vi antar at 1 er en egenverdi for $A$. Da finnes det en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ med

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= A \cdot \mathbf{v} \\ &= (I - b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T)) \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{v} - b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T) \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{v} - b\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Dette stemmer kun dersom

$$b\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

Fordi $b \neq 0$ og $\mathbf{u}$ ikke er nullvektoren, trenger vi $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} = 0$. Tallet $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v}$ er skalarproduktet av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Vi får altså at alle vektorer $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ som er ortogonale til $\mathbf{u}$ er egenvektorer til $A$ med egenverdi 1.

**c)** Er $A$ diagonaliserbar? (Husk at du må forklare ditt svar!)

**Løsningsforslag:**

$A$ er diagonaliserbar. Vi kan enten observere at $A$ er symmetrisk

$$A^T = (I_n - b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T))^T = I_n - b((\mathbf{u}^T)^T \cdot \mathbf{u}^T) = I_n - b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T) = A$$

og dermed er $A$ ortonormalt diagonaliserbar. Eller vi kan argumentere at egenrommet til egenverdi 1 er det ortogonale komplementet til $\mathbf{u}$. Dette er et underrom av $\mathbb{R}^n$ med dimensjon $n-1$. Sammen med $\mathbf{u}$ kan vi altså finne $n$ lineært uavhengige egenvektorer til $A$.

## Oppgave 10

I denne oppgaven ser vi på underrommet $U = \text{Span}\{te^{at}, e^{at}, e^t\}$ i det reelle vektorrommet av alle kontinuerlig deriverbare funksjoner og på lineærtransformasjonen $D\colon U \to U$ gitt ved å derivere funksjoner, dvs $D(f)(t) = f'(t)$.

**Variasjon:** Hver kandidat får oppgaven med én av verdiene $a = 2, 3, 4$.

**a)** Finn standardmatrisen til $D$ med hensyn på basisen $(te^{at}, e^{at}, e^t)$.

**Løsningsforslag:** Vi skriver $y_1(t) = te^{at}$, $y_2(t) = e^{at}$ og $y_3(t) = e^t$ for basisvektorene. For å finne standardmatrisen til $D$ må vi beregne hva $D$ gjør med basisvektorene:

$$\begin{aligned} D(y_1) &= y_1'(t) = ate^{at} + e^{at} = ay_1 + y_2 \\ D(y_2) &= y_2'(t) = ae^{at} = ay_2 \\ D(y_3) &= y_3'(t) = e^t = y_3. \end{aligned}$$

Kolonnene i standardmatrisen består av koeffisientene for basisvektorene:

$$[D] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Merk at rekkefølgen av kolonnene i $[D]$ avhenger av den valgte rekkefølgen av basisvektorene.

**b)** Finn egenrommene til $D$ (som underrom av $U$).

**Løsningsforslag:**

Dersom vi har funnet matrisen $[D]$ kan vi bruke den for å finne egenrommene i $\mathbb{R}^3$ og så oversette dem til underrom i $U$. Egenrommene til $[D]$ er $\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ til egenverdi $a$ og $\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ til egenverdi 1. Som underrom i $U$ betyr det at $\text{Span}\{e^{at}\}$ er egenrom til egenverdi $a$ og $\text{Span}\{e^t\}$ er egenrom til egenverdi 1.

Ellers kan vi finne egenverdiene og egenrom direkte. Alle vektorer i $U$ er på formen $c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$. Anta $\lambda$ er en egneverdi til $D$ med egenvektor $\mathbf{u}$, dvs $D\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Det tilsvarer ligningssystemet

$$c_1(ay_1 + y_2) + c_2ay_2 + c_3y_3 = \lambda c_1y_1 + \lambda c_2y_2 + \lambda c_3y_3.$$

Fordi $y_1, y_2, y_3$ er lineært uavhengige må koeffisiente være like på begge sidene:

$$\begin{aligned} ac_1 &= \lambda c_1 \\ c_1 + ac_2 &= \lambda c_2 \\ c_3 &= \lambda c_3. \end{aligned}$$

Dersom $c_3 \neq 0$, gir oss dette $\lambda = 1$ og $c_1 = c_2 = 0$. Dersom $c_1 \neq 0$, gir oss den første og tredje ligningen $\lambda = a$ og $c_3 = 0$. Men den andre ligningen blir da $ac_2 = ac_2 + c_1$. Det er en motsigelse til $c_1 \neq 0$. Vi må altså ha $c_1 = 0$. Dersom $c_2 \neq 0$ og $c_1 = 0$, får vi $\lambda = a$ og $c_3 = 0$.

Dette viser at egenverdiene er $\lambda = 1$ med egenvektor $y_3$ og $\lambda = 2$ med egenvektor $y_2$. Og det finnes ikke noen andre egenverdier. Egenrommene er altså $\text{Span}\{e^{at}\}$ til egenverdi $a$ og $\text{Span}\{e^t\}$ til egenverdi 1.

**c)** Er $D$ diagonaliserbar? (Husk at du må forklare ditt svar!)

**Løsningsforslag:**

$D$ er ikke diagonaliserbar fordi den har egenverdiene 1 og $a$ med multiplisitet 2, mens egenrommet til $a$ har dimensjon 1.