Introduksjon

Velkommen til emnet Matematikk 3. Disse notatene inneholder det vi gjennomgår i forelesningene, og utgjør, sammen med alle øvingene (inkludert innleveringene), pensum for emnet. Læreboken anbefales som støttelitteratur.

Først, et kort overblikk over temaene vi skal innom. Emnet er delt inn i tre deler:

1. Komplekse tall
2. Lineær algebra
3. Lineære differensialligninger

Del 2 er hoveddelen og vil utgjøre ca 70 prosent av emnet. Det er noen viktige tilknytningspunkter mellom disse temaene.

Komplekse tall

Hva er et tall? Da du som barn lærte å telle, lærte du tallene

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

Så lærte du å legge sammen tall, og å trekke tall fra hverandre. Da viste det seg at det går an å stille spørsmål som ikke har svar: Hva er $3 - 5$?

Men så lærte du at slike spørsmål likevel kan besvares når man bare har innført noen nye tall:

$$0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots$$

Videre utvidet du tallforståelsen din med *rasjonale tall* (brøker av heltall, for eksempel $7/5$), og så lærte du at det også finnes tall som ikke er rasjonale, for eksempel $\sqrt{2}$ og π. Når vi tar med alle slike tall, har vi mengden av *reelle tall*.

Fremdeles er det spørsmål som ikke kan besvares, for eksempel: Hva er $\sqrt{-1}$? Det finnes ikke noe reelt tall som vi kan opphøye i andre og få -1.

Men denne situasjonen er egentlig helt tilsvarende som da vi bare kjente til de positive tallene og lurte på hva $3-5$ er. Akkurat som vi da kunne utvide tallsystemet ved å legge til negative tall, kan vi nå legge til nye tall som gjør at uttrykket $\sqrt{-1}$ gir mening.

Vi lager et nytt tall, som vi kaller i, og som er definert til å være slik at

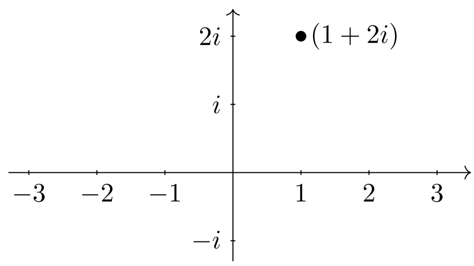
$$i^2 = -1$$

For å få et tallsystem som oppfører seg slik det skal, må vi kunne gange og legge sammen i med et hvilket som helst annet tall. Det gjør at vi må ha med flere nye tall, og til sammen får vi at alle tall som kan skrives som

$$a + bi \qquad \text{(der } a \text{ og } b \text{ er reelle tall)}$$

må være med i det nye tallsystemet. Disse tallene kalles *komplekse tall*.

Mengden av reelle tall visualiserer vi som en uendelig lang tallinje. Mengden av komplekse tall visualiserer vi som et todimensjonalt plan.



Det komplekse planet

Du må ikke la deg lure av navnet til å tro at komplekse tall er kompliserte å ha med å gjøre. På mange måter er det enklere å jobbe med komplekse tall enn med reelle tall.

Innenfor de komplekse tallene kan vi for eksempel alltid ta kvadratrøtter av hvilke som helst tall, uten å måtte tenke på om de er negative. Med andre ord: alle ligninger på formen $x^2 = a$ har løsninger. Og ikke bare det, men alle andregradsligninger

$$ax^2 + bx + c = 0$$

har løsninger. Og ikke bare det, men alle polynomligninger av hvilken som helst grad, altså alle ligninger på formen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

har løsninger.

Det som imidlertid kan gjøre komplekse tall litt vanskelige er at de ikke helt passer inn i vår intuitive forståelse av hva et tall skal være. Med reelle tall kan vi lett se for oss hvordan et tall kan representere noe målbart i den virkelige verden: en avstand, et areal, en hastighet eller liknende. Med komplekse tall er det vanskeligere å se for seg hva tallene kan representere.

Når vi får bruk for komplekse tall er det ofte slik at vi starter med noe som bare handler om reelle tall, og får et sluttsvar med bare reelle tall, men må innom de komplekse tallene i mellomregningen. Vi kommer til å se eksempler på nettopp dette når vi i emnets siste del skal løse differensialligninger.

> Oppgave: Finn kvadratroten av -4.

Lineær algebra

To av de mest sentrale begrepene i matematikk er *funksjoner* og *ligninger*. En funksjon er en regel som gir sammenhengen mellom innverdi x og utverdi y, altså $y = f(x)$. Tallet x kalles ofte en variabel, og i skolematematikken er x og y tall. De aller enkleste funksjonene vi kan tenke på, er å gange (eller dele) med et tall, og legge til (eller trekke fra) et tall. Altså funksjoner på formen $f(x) = ax$ eller $g(x) = x + b$.

En funksjon på formen $f(x) = ax + b$, kan vi tenke på som en sammensetning av to funksjoner, vi ganger først med a, så legger vi til b. Grafen til denne funksjonen er en rett linje, og derfor kaller man i skolematematikken disse for lineære funksjoner. Her kaller vi en funksjon på formen $f(x) = ax$ *lineær*, mens $f(x) = ax + b$ kalles *affin*.

Lineære og affine funksjoner er veldig spesielle, men likevel viktige. Det er to grunner til dette:

1. Når vi bruker matematikk til å beskrive verden rundt oss, må vi som regel forenkle. De fleste funksjoner som beskriver virkelige fenomener, er ganske kompliserte. Man er da nødt til å forenkle funksjonen til noe som kan håndteres, og så håpe på at forenklingen beskriver fenomenet godt nok til å være nyttig.

2. Mange sammenhenger i den virkelige verden er faktisk lineære.

> Oppgave: Finn et fenomen som beskrives av en lineær funksjon.

Vi skal se på funksjoner og ligninger med flere variable $x_1, x_2, \dots, x_n$. Hvis vi har to eller tre variable, bruker vi ofte x, y (og z) i stedet. En lineær funksjon i n variable er en funksjon

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n,$$

der a_i-ene er bestemte tall.

Lineære ligninger i én og flere variable

En lineær ligning i én variabel x, er en ligning på formen

$$ax = b$$

der a, b er tall. Hvis $a \neq 0$, kan vi løse ligningen med å dele på a, vi får altså $x = b/a$.

En lineær ligning med n variable $x_1, x_2, \dots, x_n$ er en ligning på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

a_i-ene og b er bestemte tall.

En lineær ligning med to ukjente

$$ax + by = c$$

beskriver en rett linje. Alle par (x_0, y_0) som passer i ligningen, ligger på en rett linje i xy-planet. Ligningen har altså uendelig mange løsninger. En mer presis måte å si det på, er: dersom en lineær ligning med to ukjente er løsbar, er mengden av løsninger i xy-planet, en linje, altså et én-dimensjonalt rom.

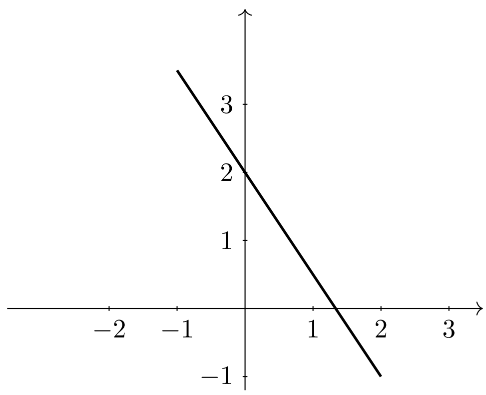
> Oppgave: En lineær ligning med tre ukjente:
>
> $$ax + by + cz = d$$
>
> Hva kan vi si om løsningene til en slik ligning i xyz-rommet? Finnes det alltid løsninger? Hva er den geometriske tolkningen av løsningsmengden?

Vi sier at xy-planet er et *to-dimensjonalt rom*, vi trenger to koordinater for å beskrive et punkt der. En rett linje er et *én-dimensjonalt rom*. Og vi er også vant til å snakke om xyz-rommet som *tre-dimensjonalt*, vi trenger tre koordinater for å beskrive et punkt i rommet. Vi kan også tenke på et punkt som et 0-dimensjonalt rom.

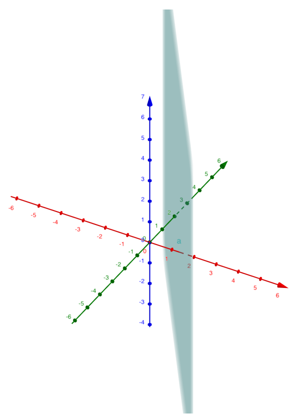
Merk at en ligning

$$ax + by = c$$

også kan betraktes som en ligning i et rom av dimensjon større enn 2, f.eks. en ligning i xyz-rommet. Løsningsmengden vil avhenge av hvilket rom vi betrakter ligingen i.



Grafen til $3x + 2y = 4$ i xy-planet. Løsningsmengden er alle punktene på denne linjen.



Grafen for ligningen $3x + 2y = 4$ i xyz-rommet. Dette blir et plan normalt på xy-planet og som går gjennom linja definert av $3x + 2y = 4$ i xy-planet. Ligningen gir ingen begrensning på z, altså er alle verdier av z tillatt.

Systemer av lineære ligninger i flere variable

I dette emnet skal vi se på systemer med m ligninger med n ukjente. Her er tre eksempler som illustrerer hva som kan skje. Betrakt systemet

$$\begin{cases} 2x + 5y = 19 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Hver ligning definerer en linje i planet. Disse linjene er ikke parallelle, og derfor skjærer de hverandre hverandre i et punkt $(2, 3)$. Dette punktet er den eneste løsningen av ligningssystemet. I et annet eksempel

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

får vi to parallelle linjer. Ingen felles punkter, altså ingen løsninger av ligningssettet. I et tredje eksempel

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

får vi at linjene sammenfaller, og uendelige mange løsninger: alle punkter på linja definert av $y = x - 1$.

Vi merker oss altså at løsningsmengden er enten tom, et punkt eller ei linje.

Et eksempel med to ligninger og tre ukjente er:

$$\begin{cases} 3x + 5y - 2z = 14 \\ x - 9y + 7z = 0 \end{cases}$$

> Oppgave: Hva er geometrisk tolkning av løsningsmengden til dette systemet?

Vi skal finne metoder for å løse slike ligningsett (merk at vi bruker ligningssett og ligningssystem om det samme), altså finne verdier for variablene som oppfyller alle ligningene, og vi skal finne metoder og utvikle teori for å beskrive mengden av alle løsninger. De viktigste verktøyene for å gjøre dette er matriser og vektorer.

Vektorer

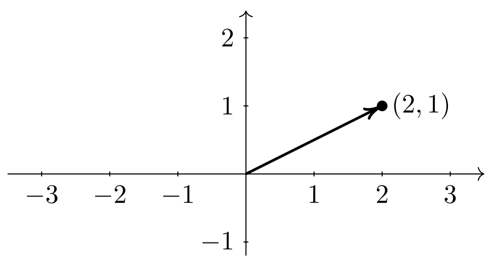
Elementer i $\mathbb{R}^n$ skal vi ofte tenke på som søyle- (eller kolonne-)vektorer

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

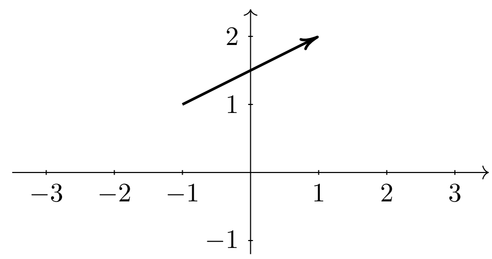
noen ganger som radvektorer

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix},$$

noen ganger som punkter (x, y, z), noen ganger (når $n \leq 3$) som piler fra origo til punktet:



og noen ganger som piler parallelle til slike:



Alt dette er bare forskjellig notasjon for samme objekt. Hvilken notasjon vi bruker, avhenger av sammenhengen.

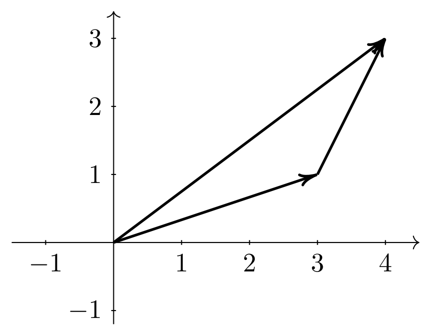
Den vanligste formen er søylevektorer. Vi kan addere vektorer

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

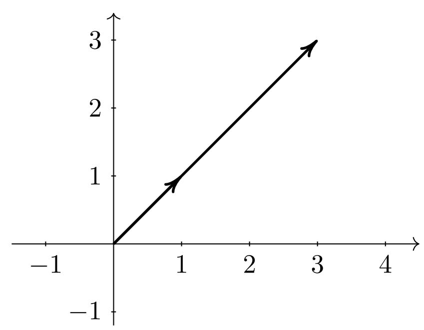
og vi kan gange vektorer med et tall t (skalarmultiplikasjon)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot t = \begin{bmatrix} tx_1 \\ tx_2 \\ \vdots \\ tx_n \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Både addisjon og skalarmultiplikasjon har velkjente geometriske tolkninger i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$.



Addisjon av vektorer: $[3, 1] + [1, 2] = [4, 3]$



Skalarmultiplikasjon av vektorer: $3 \cdot [1, 1] = [3, 3]$

Ligningsettene våre skal vi oversette fra m ligninger med n ukjente tall, til én ligning med n ukjente vektorer i $\mathbb{R}^m$. Dette kalles en *vektorligning.*

Oppgave:
1) Betrakt systemet

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

eller

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot y = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hvorfor har systemet ingen løsning?

2) Betrakt systemet

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$

eller

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot y = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Hvor mange løsninger? Hvordan kan vi beskrive dem?

Matriser

Et ligningssystem med m ligninger og n ukjente

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

kan skrives som vektorligningen

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \cdot x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \cdot x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

For å håndtere slike ligningsett skal vi bruke *matriser*. Matriser er bare tabeller av tall. Matrisen som består av koeffisientene til ligningsettet

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

kaller vi *koeffisientmatrisen* til ligningssystemet. Hvis vi utvider den med en kolonne som tilsvarer løsningene b_i

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

får vi *totalmatrisen*, også kalt den *utvidete matrisen* til ligningssystemet. Vi skal definere en lang rekke *matriseoperasjoner*, som gir oss metoder for å løse ligningssystemer.

Matriseligninger

Vi skal tenke på prikkproduktet (skalarproduktet) av to vektorer $\mathbf{c}$ og $\mathbf{d}$ i $\mathbb{R}^n$ på følgende måte. Vi skriver den ene vektoren som en radvektor

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

og den andre som en kolonnevektor

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Så lar vi

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = c_1d_1 + c_2d_2 + \cdots + c_nd_n$$

Vi ganger altså radvektorer med n elementer med kolonnevektorer med n elementer, og får et tall ut.

Dette kan vi utvide til å gange $m \times n$-matriser (altså m rader) med en kolonnevektor i $\mathbb{R}^n$, slik at resultatet blir en vektor i $\mathbb{R}^m$. Dette gir oss en måte å skrive om ligningssystemet

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

til en *matriseligning*:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Dette er en ligning på formen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

der A er en kjent matrise, $\mathbf{b}$ er en kjent vektor, og $\mathbf{x}$ er en ukjent vektor.

Hvis vi sammenligner dette med vår aller enkleste lineære ligning i én variabel

$$ax = b$$

er det fristende å spørre: Kan vi «dele» på A? Vi skal se at når $m = n$, så kan vi noen ganger det, men ikke alltid. Og det er akkurat når det opprinnelige ligningssettet har nøyaktig en løsning, at vi kan «dele».

Lineærtransformasjoner og generelle vektorrom

Hvis A er en $m \times n$-matrise kan vi altså gange med en n-dimensjonal vektor $\mathbf{x}$ på høyre side og få en m-dimensjonal vektor $\mathbf{y}$ ut. Med andre ord: Å gange med A gir oss en funksjon $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dette er et eksempel på en *lineærtransformasjon*, som vi skal se på senere i emnet.

Vi skal også abstrahere litt. Vi skal se på mengder som oppfører seg lignende som $\mathbb{R}^n$, og kalle dem *n-dimensjonale vektorrom*. Eksempler på slike vil være mengen av alle polynomer med koeffisienter i $\mathbb{R}$ av grad $< n$.

Lineære differensialligninger

Dere har møtt noen differensialligninger på videregående skole. Husk at en *differensialligning* er en ligning der den ukjente er en funksjon, og der den deriverte (og/eller høyere deriverte) av denne ukjente funksjonen inngår i ligningen. Differensialligninger er uunværlige når fysiske fenomener skal beskrives og analyseres.

I Matematikk 3 skal vi se på to forskjellige typer differensialligninger. Den ene typen er lineære andreordens differensialligninger, som vil si ligninger på formen

$$y'' + py' + qy = g,$$

der y er en ukjent funksjon av en variabel t, og g er en kjent funksjon av t, og p og q er konstanter.

Når vi skal løse en slik ligning får vi bruk for å lage en hjelpeligning, nemlig andregradsligningen

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

der λ er den ukjente, og p og q er de samme konstantene som vi hadde i differensialligningen. Løsningene av denne ligningen vil gi informasjon om hvordan løsningene av differensialligningen ser ut. Avhengig av hva p og q er, er det ikke sikkert at denne andregradsligningen har noen løsning blant de reelle tallene, men vi kan alltid finne komplekse tall som er løsninger av hjelpeligningen vår, og disse kan vi igjen bruke til å finne løsningene av differensialligningen vi startet med.

Den andre typen differensialligninger vi skal se på er systemer av førsteordens lineære differensialligninger, som vil si ligningssystemer på formen

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \quad\vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

der koeffisientene a_{ij} er konstanter og hver x_i er en ukjent funksjon av t.

Når vi har lært om lineær algebra og matriser, ser vi at et slikt system også kan skrives på den mer kompakte formen

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

der $\mathbf{x}$ er en vektorfunksjon og A er en matrise. For å løse systemet vil vi bruke avanserte lineæralgebraiske metoder.