

# Kapittel 10

## Eigenverdier og egenvektorer

Som tidligere, ønsker vi tenke på en  $m \times n$ -matrise, som en funksjon fra  $\mathbb{R}^n$  til  $\mathbb{R}^m$ . Og vi har sett at slike funksjoner har spesielle egenskaper; og kalles lineær transformasjoner. Altså, hvis  $A$  er en  $m \times n$ -matrise, så gir  $A$  en transformasjon  $f_A$

$$f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

fra  $\mathbb{R}^n$  til  $\mathbb{R}^m$ .

Hvis  $A$  er en  $n \times n$ -matrise, altså en kvadratisk matrise, så sender den vektorer i  $\mathbb{R}^n$  til andre vektorer som også er i  $\mathbb{R}^n$ . Generelt kan vektoren  $A\mathbf{v}$  være veldig forskjellig fra  $\mathbf{v}$ , men noen ganger er den ikke det. Hvis virkningen av  $A$  på  $\mathbf{v}$  er det samme som å bare gange opp  $\mathbf{v}$  med et tall, så kalles  $\mathbf{v}$  en *egenvektor* for  $A$ , og tallet kalles en *egenverdi*.

La for eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Da er  $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , så 2 er en egenverdi og  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  er en egenvektor.

I dette kapitlet skal vi se hvordan vi kan finne alle egenverdiene og egenvektorene til en matrise, og vi skal se noen interessante egenskaper de har. I de neste kapitlene skal vi se fine anvendelser av disse begrepene.

### Definisjon av egenverdier og egenvektorer

Vi ser først på et eksempel.

**Eksempel 10.1.** La  $A$  være følgende  $2 \times 2$ -matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Husk at vi som vanlig kan tenke på vektorer i  $\mathbb{R}^2$  som punkter i planet. Vi vil se på hva som skjer med punkter i planet når vi ganger dem med  $A$ , altså når vi sender en vektor  $\mathbf{x}$  til vektoren  $A\mathbf{x}$ .

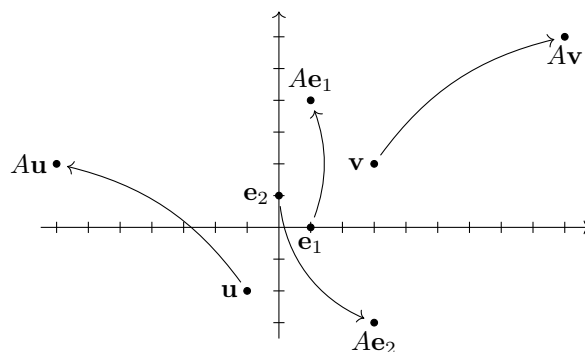
Vi velger følgende fire vektorer og ser hva  $A$  gjør med dem:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi får:

$$A\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

La oss tegne opp de fire vektorene, samt vektorene  $A$  sender dem til, som punkter i planet.



Matrisen  $A$  kaster vektorene rundt i planet

Vi ser at matrisen sender de fire eksempelvektorene våre i forskjellige retninger. Men akkurat vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er interessant. Det som skjer med den er at den blir sendt til

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix},$$

men det er jo det samme som  $3 \cdot \mathbf{v}$ . Virkningen av matrisen  $A$  på akkurat denne vektoren er altså bare å skalere den opp med 3:

$$A\mathbf{v} = 3\mathbf{v} \quad \triangle$$

Teorien om egenverdier og egenvektorer handler om å identifisere slike situasjoner som den vi så i eksempelet, der virkningen av en matrise på en vektor blir det samme som å bare gange opp vektoren med et tall, altså  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  for et tall  $\lambda$

Husk at det å gange med en  $n \times n$ -matrise er en lineærtransformasjon fra  $\mathbb{R}^n$  til  $\mathbb{R}^n$ , og vi kan definere egenverdier og egenvektorer for lineærtransformasjoner  $T: V \rightarrow V$  for alle vektorrom  $V$  ved samme egenskap.

**Definisjon.** La  $T: V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon. En skalar  $\lambda$  er en *egenverdi* for  $T$  hvis det finnes en vektor  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  i  $V$  slik at

$$T(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}.$$

Vektoren  $\mathbf{v}$  kalles en *egenvektor* for  $T$  som hører til egenverdien  $\lambda$ . Når  $T$  er gitt ved en  $n \times n$ -matrise  $A$ , så sier vi også at  $\lambda$  er en egenverdi for  $A$  og  $\mathbf{v}$  er egenvektor for  $A$  som hører til egenverdien  $\lambda$ .  $\triangle$

**Merk.** Husk at

$$T(\mathbf{0}) = \lambda \cdot \mathbf{0},$$

er oppfylt for alle lineærtransformasjoner  $T$  og alle tall  $\lambda$ . Hvis vi hadde tillatt nullvektoren som en egenvektor, så ville vi altså fått at alle tall er egenverdier for alle  $T$ . Da blir egenverdigrepet ganske meningsløst.  $\triangle$

**Eksempel 10.2.** Vi ser igjen på matrisen  $A$  fra eksempel 10.1. Vi så at vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

oppfylte likheten

$$A\mathbf{v} = 3\mathbf{v}.$$

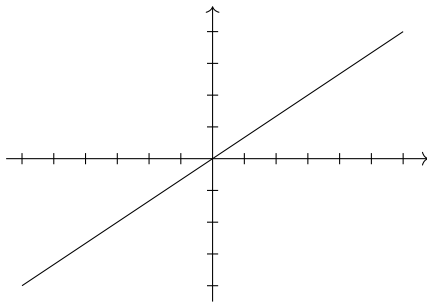
Altså er 3 en egenverdi for matrisen  $A$ , og at  $\mathbf{v}$  er en egenvektor som hører til egenverdien 3.

Det finnes flere egenvektorer. Hvis vi ser på en vektor som er parallell med  $\mathbf{v}$ , altså som er på formen  $\mathbf{w} = c \cdot \mathbf{v}$  der  $c$  er et tall, så får vi:

$$A\mathbf{w} = A \cdot (c\mathbf{v}) = c \cdot (A\mathbf{v}) = c \cdot (3\mathbf{v}) = 3 \cdot \mathbf{w}$$

Enhver slik vektor er altså en egenvektor som hører til egenverdien 3, forutsatt at den ikke er nullvektoren.

Vi har altså funnet ut at  $A$  i hvert fall har én egenverdi, nemlig 3, og uendelig mange egenvektorer som hører til denne egenverdien, nemlig alle vektorene på denne linjen (unntatt nullvektoren):



Det vi foreløpig ikke vet, er om det kan finnes enda flere egenvektorer og/eller flere egenverdier for  $A$ . Vi skal vende tilbake til dette eksempelet om en stund og finne ut av dette, etter at vi har kommet frem til en generell metode for å finne alle egenverdiene og egenvektorene til en matrise.  $\triangle$

## Noen generelle observasjoner

I eksempelet så vi at vi ut fra én egenvektor kunne finne uendelig mange egenvektorer som hørte til den samme egenverdien. Vi formulerer dette generelt som et teorem. (Beviset får du enkelt ved å generalisere det vi gjorde i eksempelet.)

**Teorem 10.3.** Anta at  $\lambda$  er en egenverdi for en lineærtransformasjon  $T: V \rightarrow V$ , og at  $\mathbf{v}$  er en tilhørende egenvektor. Da er alle multipler  $c\mathbf{v}$  av vektoren  $\mathbf{v}$ , der  $c$  er et tall som ikke er 0, også egenvektorer som hører til egenverdien  $\lambda$ . Med andre ord er alle vektorer i mengden  $\text{Sp}\{\mathbf{v}\}$ , unntatt nullvektoren, egenvektorer som hører til egenverdien  $\lambda$ .

En annen ting som vi enkelt kan se ut fra definisjonen av egenverdier og egenvektorer, er hva som skal til for at en matrise skal ha 0 som egenverdi. Hvis vi setter inn 0 for  $\lambda$  i likheten

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

så får vi  $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Det vil si at en matrise  $A$  har 0 som egenverdi hvis og bare hvis likningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

har ikke-trivielle løsninger, og dette er igjen sant hvis og bare hvis  $A$  ikke er inverterbar. Vi formulerer dette også som et teorem.

**Teorem 10.4.** En  $n \times n$ -matrise  $A$  har 0 som egenverdi hvis og bare hvis den ikke er inverterbar.

Videre ser vi at alle egenvektorer tilhørende ulike egenverdier er lineært uavhengige.

**Teorem 10.5.** La  $T: V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon. La  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t$  være egenvektorer til  $T$  som hører til forskjellige egenverdier  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ . Da er vektorene  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t$  lineært uavhengige.

*Bevis.* La oss anta at vektorene er lineært avhengige. La  $p$  være det største tallet slik at  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$  er lineært uavhengige. Da er  $\mathbf{v}_{p+1}$  en lineærkombinasjon av  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ . Det betyr at det finnes skalarer  $c_1, \dots, c_p$  slik at

$$c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + c_p \cdot \mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{p+1}. \quad (10.1)$$

Så anvender vi  $T$  på begge sidene. Fordi alle vektorer er egenvektorer, har vi  $T(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i$ . Altså får vi

$$c_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_p \lambda_p \mathbf{v}_p = \lambda_{p+1} \mathbf{v}_{p+1}. \quad (10.2)$$

Når vi ganger ligning (10.1) med  $\lambda_{p+1}$  og trekker resultatet fra ligning (10.2), så får vi

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1})\mathbf{v}_1 + \dots + c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1})\mathbf{v}_p = \mathbf{0}.$$

Nå husker vi at vektorene  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$  er lineært uavhengige og derfor gjelder det at

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1}) = \dots = c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1}) = 0.$$

Fordi egenverdiene  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$  er alle forskjellige, betyr dette at vi må ha  $c_1 = \dots = c_p = 0$ . Men dette ville betyde at  $\mathbf{v}_{p+1} = \mathbf{0}$ , noe som ikke er mulig når  $\mathbf{v}_{p+1}$  er en egenvektor. Altså måtte antagelsen vår at vektorene  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t$  er lineært avhengige være feil.  $\square$

Som en konsekvens av dette teoremet får vi det følgende viktige resultatet som vi skal se nærmere på i neste kapittel:

**Teorem 10.6.** La  $V$  være et  $n$ -dimensjonalt vektorrom og  $T: V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon. Hvis  $T$  har  $n$  forskjellige egenverdier, så finnes det en basis for  $V$  som består av egenvektorer av  $T$ .

*Bevis.* La  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  være egenvektorer til egenverdiene  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Vi vet fra teorem 10.5 at  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  er lineært uavhengige. Siden  $V$  har dimensjon  $n$ , følger det at  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  også utspenner hele  $V$ . Dette betyr at  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  er en basis for  $V$ .  $\square$

## Noen geometriske eksempler

Før vi utleder den generelle fremgangsmåten for å regne ut egenverdier og egenvektorer, tar vi noen eksempler der vi kan se geometrisk hva egenverdiene og egenvektorene må være.

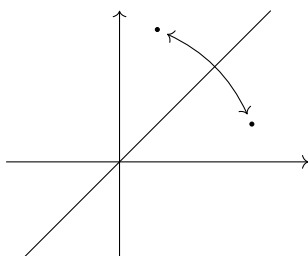
**Eksempel 10.7.** La  $A$  være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Da er

$$A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

for enhver vektor  $(v_1, v_2)$  i  $\mathbb{R}^2$ . Virkningen av  $A$  er altså en refleksjon om diagonalen som går gjennom origo og punktet  $(1, 1)$ .



Matrisen  $A$  reflekterer vektorene om diagonalen (vektorer markert som  $\cdot$ )

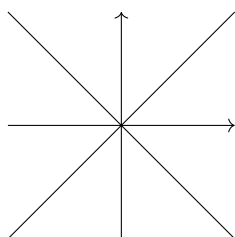
Vi ser at alle punkter på denne diagonalen sendes til seg selv, så disse oppfyller likheten

$$A\mathbf{v} = \mathbf{v},$$

og er altså egenvektorer tilhørende egenverdien 1. Vi ser dessuten at alle punkter på den omvendte diagonalen reflekteres gjennom origo slik at de oppfyller likheten

$$A\mathbf{v} = -\mathbf{v}$$

og er egenvektorer tilhørende egenverdien  $-1$ . Da har vi funnet ut at alle vektorene på disse to diagonalene (unntatt nullvektoren) er egenvektorer:



Egenvektorene er på diagonalene

Men for alle andre vektorer  $\mathbf{v}$  i planet gjør refleksjonen at  $A\mathbf{v}$  peker i en annen retning enn  $\mathbf{v}$ , så det finnes ikke flere egenvektorer.  $\triangle$

**Eksempel 10.8.** La  $A$  være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

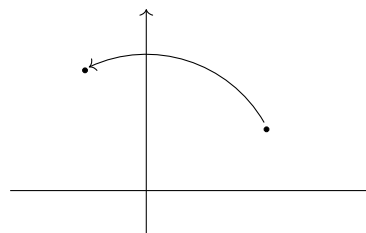
som vi oppfatter som en lineærtransformasjon

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Da er

$$A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

for enhver vektor  $(v_1, v_2)$  i  $\mathbb{R}^2$ . Virkningen av  $A$  er altså å rotere planet med  $90^\circ$ .



Matrisen  $A$  roterer planet

### Oppgave

Har  $A$  noen egenverdier og egenvektorer?

$\triangle$

La oss se på noen flere eksempler på matriser der det er veldig lett å se hva egenverdiene er.

### Oppgave

Vi ser på følgende tre matriser:

- Identitetsmatrisen  $I_n$ .
- $2 \times 2$ -matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

- $3 \times 3$ -matrisen

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2i \end{bmatrix}$$

Oppgave: Finn egenverdiene og egenvektorene til disse matrisene? (Sjekk hva matrisene gjør med standardbasisvektorene.) Hva gjør det i disse eksemplene enkelt å finne egenverdier og egenvektorer?

## Hvordan finne egenverdier og egenvektorer?

Vi skal se hvordan vi finner egenverdier og egenvektorer for alle kvadratiske matriser. La  $A$  være en  $n \times n$ -matrise.

Vi vil finne tall  $\lambda$  og vektorer  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  som oppfyller likheten

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Nå kan vi først flytte alt over til venstre side:

$$A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Nå fremstår det som veldig fristende å sette  $\mathbf{v}$ -en utenfor parentes, altså å skrive  $(A - \lambda)\mathbf{v}$ . Men det går ikke an, for uttrykket  $A - \lambda$ , altså en matrise minus et tall, gir ikke mening.

Nå kan vi bruke et lurt triks: Vi ganger inn identitetsmatrisen  $I_n$ . Vi vet at  $I_n\mathbf{v}$  bare blir  $\mathbf{v}$  uansett hva vektoren  $\mathbf{v}$  er, så vi kan skrive om ligningen til:

$$A\mathbf{v} - \lambda I_n\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Det vi har oppnådd nå er at vi har en  $n \times n$ -matrise ganget med  $\mathbf{v}$  i hvert ledd, og da kan vi sette  $\mathbf{v}$  utenfor parentes:

$$(A - \lambda I_n) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Nå ser vi at  $\lambda$  er en egenverdi for  $A$  hvis og bare hvis ligningen

$$(A - \lambda I_n) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

har en ikke-triviell løsning. Men dette er bare et vanlig lineært ligningssystem med

$$A - \lambda I_n$$

som koeffisientmatrise, og vi vet fra før at et slikt system har ikke-trivielle løsninger hvis og bare hvis

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Her har vi endt opp med en ligning med bare  $\lambda$  som ukjent. Vi kan altså løse denne for å finne egenverdiene, uten at vi samtidig må tenke på hva de tilhørende egenvektorene skal være.

Vi oppsummerer det vi har funnet ut i et teorem.

**Teorem 10.9.** *La  $A$  være en  $n \times n$ -matrise.*

(a) *Egenverdiene til  $A$  er alle løsninger  $\lambda$  av ligningen*

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

(b) *Hvis  $\lambda$  er en egenverdi for  $A$ , så er de tilhørende egenvektorene gitt ved alle ikke-trivielle løsninger av ligningen*

$$(A - \lambda I_n) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Uttrykket

$$\det(A - \lambda I_n),$$

som står på venstresiden av ligningen vi løser for å finne egenverdiene, blir et  $n$ -tegradspolynom i  $\lambda$ . Vi kaller det for det *karakteristiske polynomet* til  $A$ .

I eksemplene over hadde vi matriser der de eneste tallene som ikke er 0 er på diagonalen. Vi gir et navn til slike matriser.

**Definisjon.** En *diagonalmatrise* er en kvadratisk matrise der alle tall utenfor diagonalen er 0, altså en matrise på følgende form:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \triangle$$

Vi kan lett finne egenverdiene til enhver diagonalmatrise.

**Teorem 10.10.** *Egenverdiene til en diagonalmatrise er tallene på diagonalen.*

*Bevis.* Det karakteristiske polynomet til en diagonalmatrise  $A$  er

$$\det(A - \lambda \cdot I_n) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda).$$

Altså er tallene  $a_{11}, \dots, a_{nn}$  løsningene til ligningen  $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$ .  $\square$

**Eksempel 10.11.** Nå kan vi bruke teorem 10.9 til å finne alle egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

fra eksempel 10.1.

Vi finner egenverdiene ved å løse ligningen

$$\det(A - \lambda I_2) = 0,$$

der venstresiden er det karakteristiske polynomet til  $A$ . La oss først se hvordan matrisen  $A - \lambda I_2$  ser ut:

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 4 & -3 - \lambda \end{bmatrix}$$

Det karakteristiske polynomet blir:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(-3 - \lambda) - 3 \cdot 4 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda - 15. \end{aligned}$$

Det betyr at vi kan løse andregradsligningen

$$\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$$

for å finne egenverdiene. Vi løser den på vanlig måte og får:

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-15)}}{2} = -1 \pm 4$$

Vi får altså to egenverdier: 3 og -5.

Vi finner alle egenvektorer som hører til egenverdien 3 ved å løse ligningen  $(A - 3I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Vi kan løse denne likningen ved å gausseliminere matrisen  $(A - 3I_2)$ :

$$A - 3I_2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får én fri variabel, og løsningene blir

$$\mathbf{x} = t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

for alle tall  $t$ . Egenvektorene som hører til egenverdien 3 er altså alle vektorer i

$$\text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

unntatt nullvektoren.

Vi finner alle egenvektorer som hører til egenverdien  $-5$  ved å løse likningen  $(A + 5I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Vi kan løse denne ligningen ved å gausseliminere matrisen  $(A + 5I_2)$ :

$$A + 5I_2 = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får én fri variabel, og løsningene blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot t$$

for alle tall  $t$ . Egenvektorene som hører til egenverdien  $-5$  er altså alle vektorer i

$$\text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\},$$

unntatt nullvektoren. △

## Egenrom

Vi har sett at egenverdiene til en matrise er noen enkeltverdier, mens egenvektorene er uendelig mange (dersom matrisen har egenverdier og egenvektorer). I eksempel 10.11 beskrev vi egenvektorene tilhørende en gitt egenvektor ved å si «alle vektorer i (...) unntatt nullvektoren». Vi innfører nå et nytt begrep som gjør det litt enklere å beskrive alle egenvektorene til en egenverdi.

**Definisjon.** La  $T: V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon, og anta at  $\lambda$  er en egenverdi for  $T$ . Da er *egenrommet* til  $\lambda$  mengden av alle egenvektorer som hører til  $\lambda$ , samt nullvektoren; altså mengden

$$\{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}. \quad \triangle$$

Dimensjonen til egenrommet kalles den *geometriske multiplisiteten* til  $\lambda$ .

Legg merke til at hvis  $T$  er gitt ved å multiplisere med en  $n \times n$ -matrise  $A$ , så er egenrommet til en egenverdi  $\lambda$  det samme som nullrommet til matrisen  $A - \lambda I$ .

## Oppgave

Bestem egenrommene til matrisene:

- Identitetsmatrisen  $I_n$ .
- $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$
- $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2i \end{bmatrix}$
- Er det like enkelt å finne egenverdiene og egenrommene for matrisen  $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ?

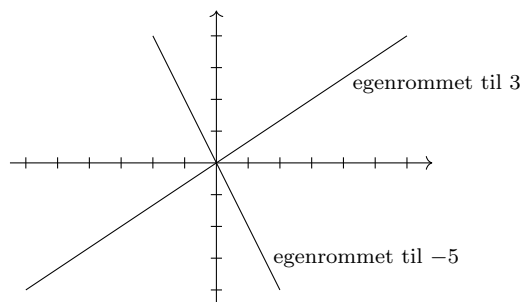
**Eksempel 10.12.** I eksempel 10.11 kunne vi sagt at egenrommet til egenvektoren 3 er

$$\text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

og at egenrommet til egenverdien  $-5$  er

$$\text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Hvert av disse to egenrommene er en linje i planet:



La oss nå ta et litt større eksempel. △

**Eksempel 10.13.** Vi finner egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 12 & 4 & -6 \\ -20 & 0 & 14 \end{bmatrix},$$

og de tilhørende egenrommene.

Det karakteristiske polynom til  $A$  er:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -8 - \lambda & 0 & 6 \\ 12 & 4 - \lambda & -6 \\ -20 & 0 & 14 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (4 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} -8 - \lambda & 6 \\ -20 & 14 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (4 - \lambda)((-8 - \lambda)(14 - \lambda) + 6 \cdot 20) \\ &= (4 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) \end{aligned}$$

Vi finner altså egenverdiene til  $A$  ved å løse tredjegradslikningen

$$(4 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0.$$

Denne ligningen er ekvivalent med at

$$4 - \lambda = 0 \quad \text{eller} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Andregradsligningen  $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$  har løsninger

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}}{2} = 3 \pm 1,$$

så vi får to egenverdier: 2 og 4.

Vi finner egenrommene ved å løse ligningene

$$(A - 2I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{og} \quad (A - 4I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

For  $\lambda = 2$  må vi gausseliminere matrisen  $A - 2I_3$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -8-2 & 0 & 6 \\ 12 & 4-2 & -6 \\ -20 & 0 & 14-2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} -10 & 0 & 6 \\ 12 & 2 & -6 \\ -20 & 0 & 12 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} -10 & 0 & 6 \\ 12 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Den første raden gir oss ligningen  $-5x_1 + 3x_3 = 0$ . Den er oppfylt for eksempel når  $x_1 = 3$  og  $x_3 = 5$ . Med disse to verdiene gir oss den andre ligningen  $x_2$  må være lik  $-3$ . Resultatet blir at egenrommet til egenverdien 2 er

$$\text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

For å finne egenrommet til egenverdien 4 må vi gausseliminere matrisen  $A - 4I_3$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -8-4 & 0 & 6 \\ 12 & 4-4 & -6 \\ -20 & 0 & 14-4 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} -12 & 0 & 6 \\ 12 & 0 & -6 \\ -20 & 0 & 10 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi ser at  $x_2$  og  $x_3$  er frie variabler. Dersom vi velger  $x_2 = 1$  og  $x_3 = 0$ , må vi ha at  $x_1 = 0$ . Dersom vi velger  $x_3 = 2$ , følger det fra den første raden at  $x_1$  må være lik 1. I dette tilfellet kan  $x_2$  være hva som helst, og vi kan for eksempel sette  $x_2 = 0$ . Dette gir oss at egenrommet til 4 er

$$\text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Egenrommet til 2 er altså en linje i  $\mathbb{R}^3$ , mens egenrommet til 4 er et plan.  $\triangle$

## Fremgangsmåte for å finne egenverdier og egenvektorer

Vi oppsummerer prosessen for å finne egenverdier og egenvektorer til en  $n \times n$ -matrise  $A$ :

1. Vi finner egenverdiene til  $A$  ved å løse ligningen

$$\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0.$$

Dette er en  $n$ -tegradsligning og har dermed maksimalt  $n$  (ikke nødvendigvis unike) løsninger  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (i neste avsnitt vil vi se at vi må skille mellom reelle og komplekse løsninger).

2. Vi finner egenrommene til  $A$  ved å løse for hver egenverdi  $\lambda_i$  ligningen

$$(A - \lambda_i I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Løsningsmengden til denne ligningen er egenrommet til  $\lambda_i$ . (Merk: Egenrommet til en egenverdi kan ikke bestå kun av nullvektoren.)

## Eksistens av egenverdier

Nå begynner vi en systematisk diskusjon om egenverdier og egenvektorer. Oppskriften vi fant for å finne egenverdiene og tilsvarende egenvektorer fører til nye viktige spørsmål:

1. Hvor mange egenverdier har en  $n \times n$ -matrise? Med andre ord, hvor mange løsninger  $\lambda$  har ligningen
 
$$\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0?$$
2. Især kan vi spørre: Finnes det alltid egenverdier og egenvektorer?
3. Hva er dimensjonen til egenrommet til en egenverdi? Og hvordan finner vi en basis til egenrommet?
4. Kan vi finne en basis til  $\mathbb{R}^n$  og  $\mathbb{C}^n$  som består kun av egenvektorer til  $A$ ?

For en  $n \times n$ -matrise  $A$  er egenverdiene løsningene  $\lambda$  til ligningen

$$\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0. \quad (10.3)$$

Det karakteristiske polynomiet  $\det(A - \lambda \cdot I_n)$  er et  $n$ -tegradspolynom i  $\lambda$  med koeffisienter som er bestemt av tallene som står i matrisen  $A$ . Især er koeffisientene reelle tall når  $A$  er en reel matrise og komplekse tall når  $A$  er en kompleks matrise.

For å avgjøre om det finnes løsninger til (10.3), er det viktig om vi leter etter løsninger i de reelle tallene  $\mathbb{R}$  eller i de komplekse tallene  $\mathbb{C}$ . Vi husker at ikke alle polynomligninger med reelle koeffisienter har reelle løsninger, for eksempel har  $x^2 + 1 = 0$  ingen løsning i  $\mathbb{R}$ .

Imidlertid husker vi algebraens fundamentalteorem fra et tidligere kapittel: Et polynom

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

kan alltid faktoriseres

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i),$$

der  $z_i$  er *komplekse* tall og løsninger av ligningen

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

Dersom en faktor  $(z - z_k)$  forekommer  $m$  ganger i faktoriseringen, sier vi at  $z_k$  har multiplisitet  $m$ .

Med andre ord, en  $n$ -tegradspolynomligning som (10.3) har alltid  $n$  *komplekse* løsninger (når vi teller løsningene med multiplisitet.) Når  $\lambda_k$  er en løsning

til (10.3) med multiplisitet  $m$  så sier vi at  $\lambda_k$  er en egenverdi med *algebraisk multiplisitet*  $m$ .

Vi oppsummerer vår første observasjon:

**Teorem 10.14.** *En kompleks  $n \times n$ -matrise  $A$  har alltid  $n$  egenverdier (talt med algebraisk multiplisitet.)*

Nå antar vi at  $A$  er en reell  $n \times n$ -matrise, dvs alle elementer i  $A$  er reelle tall. Vi kan se på  $A$  som en lineærtransformasjon  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Da har  $n$ -tegradspolynom  $\det(A - \lambda \cdot I_n)$  reelle koeffisienter og vi vet at ligningen (10.3) ikke nødvendigvis har noen reelle løsninger i det hele tatt.

**Teorem 10.15.** *For en lineærtransformasjon  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  er det mulig at den ikke har noen reelle egenverdier. Hvis  $n$  er et oddetall, har  $T$  minst én reell egenverdi.*

Vi fortsetter med en reell  $n \times n$ -matrise  $A$ . Men nå oppfatter vi  $A$  som en lineærtransformasjon av det komplekse vektorrommet  $\mathbb{C}^n$ :

$$T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}.$$

Da har  $n$ -tegradspolynom  $\det(A - \lambda \cdot I_n)$  fortsatt reelle koeffisienter, men nå tillater vi komplekse løsninger for ligningen

$$\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0.$$

Med andre ord er forskjellen at vi tillater komplekse egenverdier for en reell matrise  $A$ .

Vi skal kalle en egenverdi  $\lambda$  til  $A$  en *kompleks* egenverdi når  $\lambda$  ikke er reell, med andre ord, når  $\lambda = a + bi$  med  $b \neq 0$ . La oss anta at  $\lambda$  er en kompleks egenverdi til  $A$ . Da vet vi at  $\bar{\lambda}$ , den komplekskonjugerte til  $\lambda$ , også er en egenverdi. Dersom  $\mathbf{v}$  er en egenvektor til  $\lambda$ , har vi at

$$A\bar{\mathbf{v}} = \bar{A}\mathbf{v} = \bar{\lambda}\mathbf{v} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}.$$

**Teorem 10.16.** *De komplekse egenverdiene til en reell matrise kommer i komplekskonjugerte par.*

**Eksempel 10.17.** Matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

har visst egenverdier allikevel, se eksempel 10.8. Men disse egenverdiene og de tilsvarende egenvektorene er komplekse. Det karakteristiske polynom er

$$\lambda^2 + 1,$$

så egenverdiene er  $\pm i$ .

Vi kan også beregne egenrommene. Egenrommet til  $-i$  er nullrommet til

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$

Denne matrisen ikke er inverterbar, og da må radene være skalarmultipler av hverandre (i dette tilfellet er den nederste  $i$  ganger den øverste), så vi kan egentlig bare stryke den nederste, og se at

$$ix_1 - x_2 = 0,$$

slik at en egenvektor til  $-i$  blir

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Vi dobbelsjekker resultatet:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = (-i) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

Likeledes blir en egenvektor til  $i$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Vi dobbeltsjekker

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

**Eksempel 10.18.** Matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

har karakteristisk polynom

$$(3 - \lambda)((1 - \lambda)^2 + 1) = (3 - \lambda)(2 - 2\lambda + \lambda^2).$$

Den ene egenverdien er åpenbart  $\lambda = 3$ , mens andregradspolynom  $2 - 2\lambda + \lambda^2$  har røtter

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = 1 \pm i.$$

Her er det altså en reell egenverdi 3, og to komplekse egenverdier  $1 + i$  og  $1 - i$ .

Vi beregner egenrommet til egenverdi  $\lambda = 1 - i$ . Dette er nullrommet til

$$\begin{bmatrix} 2 + i & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}.$$

Den øverste raden forteller at  $x_1 = 0$ . De to nederste ligner mistenkelig på forrige eksempel, så en egenvektor blir

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Vi dobbeltsjekker

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - i \\ 1 + i \end{bmatrix} = (1 - i) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

**Eksempel 10.19.** Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

har karakteristisk ligning

$$(2 - \lambda)(1 - \lambda)^2 = 0,$$

med en enkel egenverdi  $\lambda = 2$ , og en dobbel egenverdi  $\lambda = 1$ .

La oss se nærmere på den doble egenverdien  $\lambda = 1$ . Det tilhørende egenrommet er nullrommet til

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dette gir at  $x_2 = x_3 = 0$ , så en egenvektor til  $\lambda = 1$  er

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og egenrommet er

$$\text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Her er egenrommet endimensjonalt, mens egenverdien hadde multiplisitet 2.  $\triangle$

Vi ser i eksemplet over at dimensjonen til egenrommet til en egenverdi kan være lavere enn den algebraiske multiplisiteten. Det motsatte kan ikke skje:

**Teorem 10.20.** *Egenrommet har dimensjon større enn eller lik 1 og mindre enn eller lik den algebraiske multiplisiteten til egenverdien.*

Dersom et egenrom har lavere dimensjon enn multiplisiteten til egenverdien, sier vi at egenverdien er *defekt*. Dersom en  $n \times n$ -matrise har  $n$  lineært uavhengige egenvektorer, sier vi at den er *diagonaliserbar*. Grunnen til dette navnet skal vi komme tilbake til i neste kapittel.

Det er ikke viktig å kunne beviset, men vi tar det med for de som måtte være interesserte.

*Bevis av teorem 10.20.* Anta at  $A$  er en  $n \times n$ -matrise med  $k$  lineært uavhengige egenvektorer korresponderende til  $\lambda$ . Vi kaller dem  $v_1, \dots, v_k$ . Vi kan finne  $n - k$  vektorer  $w_{k+1}, \dots, w_n$  slik at  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_n)$  er en basis for  $\mathbb{R}^n$ . Vi betrakter  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gitt ved  $T(u) = Au$ . Siden  $Av_1 = \lambda v_1$  er  $[T(v_1)]_{\mathcal{B}} = [\lambda \ 0 \ \dots \ 0]^T$ . Tilsvarende er  $[T(v_i)]_{\mathcal{B}} = \lambda \mathbf{e}_i$ . Dermed er

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda I_k & X \\ 0 & A' \end{bmatrix}$$

hvor  $I_k$  er  $k \times k$  identitetsmatrisen,  $A'$  er en eller annen  $(n - k) \times (n - k)$  matrise og  $X$  er en eller annen  $k \times (n - k)$  matrise. Vi ser at  $\det([T]_{\mathcal{B}} - xI)$  har  $(\lambda - x)^k$  som en faktor. Nå gjenstår bare å se at  $[T]_{\mathcal{B}}$  har samme karakteristiske polynom som  $A$ . Dersom vi setter  $P = [v_1 | \dots | v_k | w_{k+1} | \dots | w_n]$  følger det fra teorem 8.15 og 8.16 at  $[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP$ . Dermed har vi

$$\begin{aligned} \det(A - xI) &= \det(P^{-1}(A - xI)P) \\ &= \det(P^{-1}AP - P^{-1}Px) \\ &= \det([T]_{\mathcal{B}} - xI) \end{aligned}$$

□