Kapittel 4

Matriser

Vi har lært å løse et lineært ligningssystem ved å sette opp totalmatrisen til systemet og gausseliminere den, ved hjelp av radoperasjoner på matrisen. Vi skal nå se nærmere på egenskaper ved matriser og regning med matriser.

Resultatene i dette kapitlet gjelder for både reelle og komplekse vektorer og matriser.

Definisjoner og notasjon

En $m \times n$*-matrise* er en rektangulær tabell med tall som har m tall i høyden og n tall i bredden:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Kolonnene i matrisen er følgende kolonnevektorer:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \qquad \cdots \qquad \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Radene i matrisen er følgende radvektorer:

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Eksempel 4.1. Kolonnene til matrisen

$$\begin{bmatrix} 5+i & 0 & -2 \\ 3 & 1-i & 4 \end{bmatrix}$$

er:

$$\begin{bmatrix} 5+i \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Radene er:

$$\begin{bmatrix} 5+i & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1-i & 4 \end{bmatrix} \qquad \triangle$$

Mange av matrisene vi vil møte, er totalmatriser til ligningssystemer, men ikke alle. Merk at for et ligningssystem med m ligninger og n ukjente, er totalmatrisen en $m \times (n+1)$-matrise. De første n kolonnene er koeffisientene i ligningene, mens den siste kolonnen (altså den lengst til høyre) er løsningene til de m ligningene.

Hvis vi har en liste med kolonnevektorer

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_n,$$

kan vi lage en $m \times n$-matrise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

der disse er kolonner.

Eksempel 4.2. La

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

være to vektorer i $\mathbb{R}^3$. Da blir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \triangle$$

På samme måte kan vi, hvis vi har en liste med radvektorer

$$\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2,\ \ldots,\ \mathbf{r}_m,$$

lage en matrise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \end{bmatrix}$$

med disse vektorene som rader.

Eksempel 4.3. La

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 2i & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4-i \end{bmatrix}$$

være tre radvektorer i $\mathbb{C}^2$. Da har vi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4-i \end{bmatrix} \qquad \triangle$$

Noen ganger vil vi bruke tilsvarende notasjon for å bygge opp en matrise av andre matriser, eller av en kombinasjon av matriser og vektorer.

Eksempel 4.4. La A og B være matriser, og $\mathbf{v}$ en vektor:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 10 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Da kan vi skrive

$$\begin{bmatrix} A & B & \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 9 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 4 & 8 \\ 7 & 1 & 10 & 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \qquad \triangle$$

En $n \times n$-matrise kaller vi en *kvadratisk* matrise.

Produkt av matrise og vektor

La

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

være en $m \times n$-matrise med vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ som kolonner, og la

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

være en vektor i $\mathbb{R}^n$ (eller en vektor i $\mathbb{C}^n$). Vi definerer produktet $A\mathbf{v}$ av A og $\mathbf{v}$ som lineærkombinasjonen av kolonnene i A med tallene i $\mathbf{v}$ som vekter:

$$A\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 v_1 + \mathbf{a}_2 v_2 + \cdots + \mathbf{a}_n v_n$$

Merk at produktet $A\mathbf{v}$ bare er definert når bredden av matrisen A er lik høyden av vektoren $\mathbf{v}$.

Eksempel 4.5. Vi regner ut produktet av en 2×3-matrise og en vektor i $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 5+i & 0 & -2 \\ 3 & 1-i & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5-i \\ 3 \end{bmatrix} \cdot 2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \end{bmatrix} \cdot (-1) + \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot 3 \\ (*) &= \begin{bmatrix} (5+i) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + (1-i) \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4+2i \\ 17+i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Merk at resultatet blir en vektor i $\mathbb{C}^2$. $\triangle$

Utregningen $(*)$ viser en mer direkte måte å regne ut produktet $A\mathbf{v}$ på: Tallet som skal være på første posisjon i resultatvektoren får vi ved å gange tallene fra første rad i A med tallene i $\mathbf{v}$, og legge sammen resultatene. Tallet på andre posisjon i resultatvektoren får vi på samme måte fra andre rad i A.

Generelt har vi at dersom

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

så kan vi regne ut produktet $A\mathbf{v}$ på følgende måte:

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{bmatrix}$$

Teorem 4.6. *Hvis A er en $m \times n$-matrise, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er vektorer i $\mathbb{R}^n$ og c er en skalar, så har vi følgende likheter:*

$$A(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = A\mathbf{v}+A\mathbf{w} \qquad \text{og} \qquad A(c\mathbf{v}) = c(A\mathbf{v})$$

Det er verdt å merke seg hva som skjer hvis vi ganger en matrise med en vektor der nøyaktig ett av tallene er 1, og resten er 0. La oss teste dette med en eksempelmatrise:

Eksempel 4.7. Vi ganger 2×3-matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5+i & 0 & -2 \\ 3 & 1-i & 4 \end{bmatrix}$$

med de tre vektorene

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og får følgende:

$$\begin{aligned} A\mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} 5+i \\ 3 \end{bmatrix} \\ A\mathbf{e}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \end{bmatrix} \\ A\mathbf{e}_3 &= \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resultatene ble altså de tre kolonnene i A. $\triangle$

Generelt har vi at hvis A er en $m \times n$-matrise, og $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ er *enhetsvektorene*, altså vektorene som er slik at $\mathbf{e}_i$ har et 1-tall i sin i-te koordinat og bare 0-er ellers, så er

$$A\mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{e}_2, \quad \ldots, \quad A\mathbf{e}_n$$

nøyaktig samme vektorer som kolonnene i A, altså har vi

$$A = \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_1 & \ldots & A\mathbf{e}_b \end{bmatrix}.$$

Matriseligninger

Ved å bruke definisjonene fra forrige avsnitt kan vi nå skrive om et lineært ligningssystem som en matriseligning, altså en ligning på formen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

til en ligning på formen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Altså får vi en ligning

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

der A og $\mathbf{b}$ er kjente (hhv en matrise og en vektor), og $\mathbf{x}$ er en ukjent vektor.

Eksempel 4.8. Ligningssettet

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ -x + 6y = 3 \end{cases}$$

kan skrives om til ligningen

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$\triangle$

Sum og skalering av matriser

La A og B være to $m \times n$-matriser:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Vi definerer summen $A+B$ som en ny $m \times n$-matrise, sånn:

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Produktet av et tall og en matrise defineres sånn:

$$cA = \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} & \cdots & c \cdot a_{1n} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} & \cdots & c \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c \cdot a_{m1} & c \cdot a_{m2} & \cdots & c \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

Teorem 4.9. *Hvis A og B er $m \times n$-matriser, $\mathbf{v}$ er en vektor og c er en skalar, så har vi følgende likheter:*

$$(A+B)\mathbf{v} = A\mathbf{v} + B\mathbf{v} \qquad \textit{og} \qquad (cA)\mathbf{v} = c(A\mathbf{v})$$

Vektorer som matriser

Hittil har vi snakket om vektorer og matriser som to forskjellige ting, men vi kan også velge å se på vektorer som et spesialtilfelle av matriser der enten høyden eller bredden er 1.

En kolonnevektor

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

kan vi tenke på som en $m \times 1$-matrise, og en radvektor

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix}$$

kan vi tenke på som en $1 \times n$-matrise.

Eksempel 4.10. La $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være henholdsvis en kolonnevektor og en radvektor:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Vektoren $\mathbf{v}$ kan vi også se på som en 3×1-matrise, og vektoren $\mathbf{w}$ kan vi se på som en 1×3-matrise.

Hvis vi velger å tenke på $\mathbf{w}$ som en matrise og $\mathbf{v}$ som en vektor, så kan vi gange dem sammen med den vanlige regelen for produkt av matrise og vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resultatet blir vektoren $\begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^1$. En vektor i $\mathbb{R}^1$ består av kun ett tall, og vi vil vanligvis si at en slik vektor er det samme som det ene tallet. Med andre ord kan vi sløyfe klammene og ganske enkelt skrive:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 8.$$

$\triangle$

Generelt har vi at produktet av en radvektor og en kolonnevektor er gitt ved følgende uttrykk:

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = w_1 v_1 + w_2 v_2 + \cdots + w_n v_n$$

Legg merke til at dette er prikk-produktet av to vektorer (som også noen ganger kalles skalarproduktet), som du lærte om på videregående skole.

Matrisemultiplikasjon

Hvis $\mathbf{x}$ er en vektor i $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$ og A er en $m \times n$-matrise, er altså $A\mathbf{x}$ en vektor i $\mathbb{R}^m$ eller $\mathbb{C}^m$, henholdsvis. Så vi kan tenke på det å multiplisere med A, som en funksjon f_A fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ eller $\mathbb{C}^n$ til $\mathbb{C}^m$. Vi skal senere se mye på denne typen funksjoner, som vi vil kalle *lineærtransformasjoner*. Noen av de operasjonene på matriser vi skal se på nå, er motivert fra at vi ønsker å tenke på matrisemultiplikasjon som funksjoner.

Når vi ganger en vektor med en $m \times n$-matrise, kan vi altså tenke på det som en funksjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$. Multiplikasjon av to matriser A og B vil vi tenke på som sammensetning av funksjoner, og vil derfor at følgende likhet skal holde:

$$(AB)\mathbf{v} = A(B\mathbf{v})$$

Funksjonen f_B, som er "å gange med B", skal virke først, og så virker funsjonen f_A, som er å gange med A. Hvis dette skal gi mening og A er en $m \times n$-matrise, mens B er en $p \times q$-matrise på vi da ha at $n = p$, siden f_B spytter ut elementer i $\mathbb{R}^p$ og da må input til f_A også være i $\mathbb{R}^p$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^q \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend right, "f_{AB}"'] & \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Altså sammensetningen av funksjonene f_B og f_A skal være funksjonen f_{AB}.

Hvordan kan vi definere produkt av matriser slik at dette fungerer? La oss først se på et eksempel.

Eksempel 4.11. La A og B være følgende to 2×2-matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi har lyst til å finne matrisen AB som skal være slik at $(AB)\mathbf{v} = A(B\mathbf{v})$ for alle vektorer $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$.

Vi ser først på multiplikasjon med enhetsvektorene.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi vet fra tidligere at hvis vi ganger en 2×2-matrise med en av disse vektorene, så får vi ut den første eller den andre kolonnen i matrisen.

Vi regner ut:

$$B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$A\left(B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Det vi er ute etter er at AB skal være slik at

$$(AB)\mathbf{v} = A(B\mathbf{v})$$

for alle vektorer $\mathbf{v}$. Spesielt må vi da ha:

$$(AB) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A\left(B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Men det å gange med vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

er det samme som å plukke ut første kolonne av matrisen, så vi har nå funnet ut at første kolonne i matrisen AB må være:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 22 \end{bmatrix}$$

På samme måte finner vi andre kolonne i AB:

$$B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$A\left(B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix}$$
$$(AB) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = A\left(B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Dette betyr at andre kolonne i AB må være:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Dermed kommer vi frem til at produktet av A og B er:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 22 & 13 \end{bmatrix}$$

△

La oss nå generalisere det vi gjorde i eksempelet. Foreløpig ser vi på generelle 2×2-matriser, og så tar vi det helt generelle tilfellet, med matriser av vilkårlig størrelse, etterpå.

La A og B være to 2×2-matriser, og la

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

være de to spesielle vektorene vi brukte i eksempelet over. La $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ være kolonnene i B, slik at vi har:

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

På samme måte som i eksempelet får vi nå:

$$(AB)\mathbf{e}_1 = A(B\mathbf{e}_1) = A\mathbf{b}_1$$
$$(AB)\mathbf{e}_2 = A(B\mathbf{e}_2) = A\mathbf{b}_2$$

Dette betyr at første kolonne i matrisen AB må være $A\mathbf{b}_1$, og andre kolonne må være $A\mathbf{b}_2$. Vi får altså:

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

Hvis vi lar $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ være radene i A, så gir dette oss at:

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

For å virkelig gjøre dette detaljert, kan vi skrive opp nøyaktig hvordan vi finner hvert tall i AB ut fra hvert enkelt av tallene i A og B. Hvis

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

så får vi:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Merk hvordan dette siste uttrykket er bygd opp. Når vi skal finne tallet som skal stå på en bestemt posisjon i AB, går vi bortover den tilsvarende *raden* i A og samtidig nedover den tilsvarende *kolonnen* i B. Vi ganger sammen tallene vi finner i A med de vi finner i B, og legger sammen disse produktene. Altså er elementet i rad i og kolonne j i AB prikkproduktet av rad i i A og kolonne j i B.

Alt det vi gjorde nå fungerer helt tilsvarende når vi går til større matriser enn 2×2. Men for at det skal gå an å gange sammen to matriser A og B, må de være «kompatible» i størrelse. Vi finner produktet AB ved å kombinere rader fra A med kolonner fra B. Altså må A ha like mange kolonner, som B har rader, eller med andre ord: vi kan bare gange en $m \times n$-matrise med $n \times p$-matrise, der m og p kan være alle mulige positive heltall.

Basert på det vi har gjort nå lager vi en generell definisjon av matrisemultiplikasjon.

Definisjon. La A være en $m \times n$-matrise med rader $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, og la B være en $n \times p$-matrise med kolonner $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_p$:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix}$$

Da er produktet av A og B en $m \times p$-matrise definert ved:

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_p \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_m\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_m\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m\mathbf{b}_p \end{bmatrix} \qquad \triangle$$

Hvis vi lar A og B være som i definisjonen, kan vi også skrive produktet slik:

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_p \end{bmatrix}$$

NB: Merk at en $m \times n$-matrise A ganget med en $n \times p$-matrise B gir en $m \times p$-matrise AB.

$$\text{Huskeregel: } \boxed{m \times \cancel{n}} \cdot \boxed{\cancel{n} \times p} = \boxed{m \times p}$$

Eksempel 4.12. La A og B og C være følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 5+i & 0 & -2 \\ 3 & 1-i & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Siden A er en 2×3-matrise og B er en 3×2-matrise, er AB en 2×2-matrise. Vi regner ut denne matrisen ved å bruke definisjonen:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} (5+i)\cdot 2+0\cdot 1+(-2)\cdot 2 & (5+i)\cdot 1+0\cdot 0+(-2)\cdot 4 \\ 3\cdot 2+(1-i)\cdot 1+4\cdot 2 & 3\cdot 1+(1-i)\cdot 0+4\cdot 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6+2i & -3+i \\ 15-i & 19 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hvis vi ganger sammen de samme to matrisene i motsatt rekkefølge, får vi en 3×3-matrise:

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 2\cdot(5+i)+1\cdot 3 & 2\cdot 0+1\cdot(1-i) & 2\cdot(-2)+1\cdot 4 \\ 1\cdot(5+i)+0\cdot 3 & 1\cdot 0+0\cdot(1-i) & 1\cdot(-2)+0\cdot 4 \\ 2\cdot(5+i)+4\cdot 3 & 2\cdot 0+4\cdot(1-i) & 2\cdot(-2)+4\cdot 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 13+2i & 1-i & 0 \\ 5+i & 0 & -2 \\ 22+2i & 4-4i & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Produktet av matrisene B og C blir en 3×2-matrise:

$$BC = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}$$

Men produktet CB er ikke definert, siden C er en 2×2-matrise og B en 3×2-matrise.

Vi kunne også regnet ut for eksempel CA, men AC er ikke definert. $\triangle$

Legg merke til at matrisemultiplikasjon – i motsetning til multiplikasjon av vanlige tall – ikke er kommutativt. Det vil si at faktorenes rekkefølge spiller en rolle: AB er ikke nødvendigvis det samme som BA.

Mange andre regneregler fungerer like bra med matriser som med tall, la oss se på noen.

Teorem 4.13. *La A, B og C være matriser, $\mathbf{v}$ en vektor, og c et tall. I hver del av teoremet antar vi at størrelsene på matrisene og vektoren er slik at alle operasjonene som brukes er definert.*

(a) *Matrisemultiplikasjon er en assosiativ operasjon, det vil si:*

$$A(BC) = (AB)C$$

Et spesialtilfelle av dette er følgende:

$$(AB)\mathbf{v} = A(B\mathbf{v})$$

(b) *Å skalere et matriseprodukt er det samme som å skalere én av faktorene og deretter multiplisere:*

$$(cA)B = c(AB) = A(cB)$$

(c) *Matrisemultiplikasjon distribuerer over addisjon av matriser, det vil si:*

$$\begin{aligned} A(B+C) &= AB + AC \quad \textit{og} \\ (A+B)C &= AC + BC \end{aligned}$$

Vi skal ikke gjøre detaljene i beviset for Teorem 4.13. Men tenk litt på (a). Prøver du å regne ut $A(BC)$ og $(AB)C$ for matriser A, B og C på generell form, blir det mye regning og litt stygge uttrykk. Men: Vi vet at sammensetning av funksjoner (helt generelt) er en assosiativ operasjon. Siden å multiplisere med en $m \times n$-matrise A er en funksjon f_A fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$, blir (a) en direkte konsekvens av dette, og vi slipper å regne ut noe som helst.

Transponering

Vi har hittil snakket om aritmetiske operasjoner på matriser som tilsvarer operasjoner vi kan gjøre med tall: addisjon og multiplikasjon. Operasjonen *transponering*, derimot, er spesiell for matriser, og går ut på at vi bytter om rader og kolonner.

Definisjon. La

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

være en $m \times n$-matrise. Den *transponerte* av A er $n \times m$-matrisen

$$A^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

der radene og kolonnene i A er byttet om. $\triangle$

Eksempel 4.14. Hvis vi lar A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5+i & 0 & -2 \\ 3 & 1-i & 4 \end{bmatrix},$$

så er den transponerte av A gitt ved:

$$A^\top = \begin{bmatrix} 5+i & 3 \\ 0 & 1-i \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

△

Vi tar med noen regneregler for transponering.

Teorem 4.15. *For enhver matrise A har vi:*

$$(A^\top)^\top = A.$$

Hvis A og B er matriser slik at produktet AB er definert, så er:

$$(AB)^\top = B^\top \cdot A^\top.$$

Identitetsmatriser

La $I = I_n$ være den kvadratiske $n \times n$-matrisen

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Da er $I \cdot A = A$ for enhver $n \times p$-matrise A og $B \cdot I = B$ for enhver $m \times n$-matrise B. Spesielt er $I \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ for enhver vektor $\mathbf{x}$. (Oppgave: sjekk alt dette).

Derfor kalles $I = I_n$ en *identitetsmatrise*, eller en $n \times n$-identitetsmatrise.

Eksempel 4.16. Identitetsmatrisen av størrelse 2 er:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi sjekker enkelt at vi kan gange en hvilken som helst 2×2-matrise med I_2, til venstre eller høyre, uten at noe endres:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 & a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 & a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} \\ 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} & 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

△

Potenser av matriser

Hvis A er en kvadratisk matrise, så kan vi gange A med seg selv. Vi definerer potenser av A på tilsvarende måte som potenser av tall:

$$A^2 = A \cdot A,$$
$$A^3 = A \cdot A \cdot A,$$

og så videre. Generelt definerer vi at A opphøyd i n-te er produktet av A med seg selv n ganger:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{n \text{ ganger}}$$

Uttrykket over gir mening, siden multiplikasjon av matriser er assosiativt, som vi så i Teorem 4.13. Et spesielt tilfelle er å opphøye i 0-te. For tall har vi definert at $a^0 = 1$. Men vi vet jo at for matriser spiller identitetsmatrisen den samme rollen som 1 gjør for tall. Derfor definerer vi at en $n \times n$-matrise opphøyd i 0-te blir identitetsmatrisen av størrelse n:

$$A^0 = I_n$$

Inverser

For multiplikasjon av tall har vi identitetselementet 1, med egenskapen $1 \cdot x = x = x \cdot 1$. Dessuten har vi *inverser*. Gitt et ikke-null tall a finnes et tall b, inversen til a, som er slik at

$$a \cdot b = 1.$$

Inversen til a er selvfølgelig bare tallet $1/a$. For eksempel: Inversen til tallet 5 er $1/5$, og inversen til $3/4$ er $4/3$.

Kan vi på tilsvarende måte finne inverser til matriser? Igjen begrenser vi oss til å se på kvadratiske matriser, og spørsmålet blir: Gitt en $n \times n$-matrise A, finnes det en matrise B som er slik at likhetene

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A$$

er oppfylt?

Vi tar et eksempel for å se hvordan noen slike matriser kan se ut.

Eksempel 4.17. La A og B være følgende 2×2-matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix}$$

Da kan vi regne ut at

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

og

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Disse matrisene oppfyller altså likhetene

$$A \cdot B = I_2 = B \cdot A.$$ △

Vi definerer begrepet «invers» ved å bruke disse likhetene.

Definisjon. La A være en $n \times n$-matrise. En *invers* til A er en $n \times n$-matrise B som er slik at

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A.$$

En matrise er *inverterbar* hvis den har en invers. △

Denne definisjonen gir opphav til noen åpenbare spørsmål:

- Finnes det kvadratiske matriser som ikke har noen invers? (Vi har gitt et eget navn, «inverterbar», til matriser som har invers. Dette hinter ganske sterkt om at det bør finnes matriser som ikke har invers også.)
- Kan en matrise ha mer enn én invers?

Det første spørsmålet besvares ved en oppgave:

Oppgave

Vis at ingen av matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

er inverterbare.

Det andre spørsmålet besvarer vi med et teorem.

Teorem 4.18. *Hvis en matrise er inverterbar, så har den nøyaktig én invers.*

Bevis. La A være en inverterbar $n \times n$-matrise. Anta at B er en invers til A, og at C også er en invers til A; det vil si at

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A \qquad \text{og} \qquad A \cdot C = I_n = C \cdot A.$$

Vi vil vise at B og C ikke kan være forskjellige, altså at vi må ha $B = C$.

La oss ta utgangspunkt i produktet BAC. Dette kan vi skrive som enten $(BA) \cdot C$ eller $B \cdot (AC)$, og i hvert tilfelle får vi (ved å bruke likhetene over) at uttrykket i parentes blir identitetsmatrisen. Vi setter dette sammen og får:

$$C = I_n \cdot C = (BA) \cdot C = B \cdot (AC) = B \cdot I_n = B$$

Vi har altså kommet frem til at $B = C$, så inversen er entydig. □

Nå som vi vet at en matrise A ikke kan ha mer enn én invers, kan vi slutte å snakke om «en invers til A» i ubestemt form. Isteden sier vi «inversen til A» og kaller denne A^{-1}.

Eksempel 4.19. I eksempel 4.17 er matrisen B inversen til A; vi har altså at $A^{-1} = B$. Vi får dessuten at A er inversen til B, slik at $B^{-1} = A$. △

Hvorfor er inverser interessante? Én grunn er at de kan fortelle oss noe om løsninger av ligninger.

Hvis vi skal løse en ligning

$$ax = b$$

der a og b er tall, så vil vi selvfølgelig dele på a for å få x alene på venstresiden. Det er det samme som å gange med inversen til a.

Når vi skal løse en matriseligning

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

så kan vi ikke dele på A. Men hvis A er inverterbar, så kan vi gange med inversen til A. Det gjør at vi kan konkludere med at ligningen er løsbar og at løsningen er entydig. Vi skriver opp dette som et teorem.

Teorem 4.20. *La A være en $n \times n$-matrise, og $\mathbf{b}$ en vektor. Hvis A er inverterbar, så har ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ entydig løsning, og løsningen er $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$.*

Bevis. Vi sjekker ved innsetting at $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$ er en løsning av ligningen. Vi har:

$$A \cdot (A^{-1} \cdot \mathbf{b}) = (A \cdot A^{-1}) \cdot \mathbf{b} = I_n \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}$$

Det betyr at $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$ er en løsning.

Nå må vi sjekke at den er entydig. Fra ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ får vi ved å gange til venstre med A^{-1} på begge sider av likhetstegnet:

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Men siden $A^{-1}A = I_n$ kan venstresiden her forenkles til $I_n\mathbf{x}$, som bare er $\mathbf{x}$. Dermed har vi:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Det betyr at dette er den eneste løsningen av ligningen, og beviset er ferdig. □

Eksempel 4.21. La oss se på følgende ligning:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Fra eksempel 4.17 vet vi at matrisen på venstresiden av denne ligningen er inverterbar, og at inversen er:

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix}$$

Da sier teorem 4.20 at ligningen har entydig løsning, og at løsningen er:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$ △

Vi skal senere se hvordan man finner inversen til en inverterbar matrise. Før vi gjør det, skal vi se på en generell teknikk for å løse flere ligningssystemer samtidig. Denne teknikken skal vi deretter bruke til å finne en metode for å regne ut inverser.

Samtidig løsning av flere systemer

Vi husker at et lineært ligningssystem kan skrives som en matriseligning $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, og at vi løser det ved å gausseliminere totalmatrisen $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array}\right]$.

Anta nå at vi vil løse flere systemer

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_1 &= \mathbf{b}_1 \\ A\mathbf{x}_2 &= \mathbf{b}_2 \\ &\vdots \\ A\mathbf{x}_t &= \mathbf{b}_t \end{aligned}$$

med samme koeffisientmatrise A, men forskjellige høyresidevektorer $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_t$. Det kan vi selvsagt gjøre ved å utføre gausseliminasjon på totalmatrisene til alle systemene:

$$\begin{gathered} \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b}_1 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b}_2 \end{array}\right] \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b}_t \end{array}\right] \end{gathered}$$

Siden venstre side er lik for alle ligningssettene, gjør vi da egentlig den samme gausseliminasjonen mange ganger. Det eneste som blir forskjellig er hva vi får i siste kolonne. Vi kan spare oss for arbeid ved å slå sammen totalmatrisene til den ene matrisen

$$\left[\begin{array}{c|cccc} A & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_t \end{array}\right],$$

og gausseliminere den.

Eksempel 4.22. La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi vil løse disse tre systemene:

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi lager en kombinert totalmatrise for alle systemene, og gausseliminerer den:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & -2 & -2 & 10 & -4 \\ 1 & 3 & 7 & 1 & 0 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 10 & -4 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & 8 & -4 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1/2 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & -3/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1/2 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Den siste matrisen her er på redusert trappeform, og nå kan vi finne løsningene av de tre systemene ved å se på de tre høyresidene i denne matrisen:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \qquad \triangle$$

Beregning av inverser

La oss nå se på hvordan vi kan regne ut inverser. Anta at vi har en $n \times n$-matrise A. Vi vil finne ut om den er inverterbar, og i så fall vil vi finne inversmatrisen A^{-1}.

Vi ser på ligningen

$$AX = I_n,$$

der X er en ukjent $n \times n$-matrise. Hvis vi lar

$$\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_n$$

være kolonnene i X, altså

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix},$$

så kan vi skrive produktet AX slik:

$$AX = \begin{bmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & \cdots & A\mathbf{x}_n \end{bmatrix}$$

La oss gi navn til kolonnene i identitetsmatrisen I_n også:

$$I_n = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \ldots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix}$$

Det vil si at $\mathbf{e}_i$ er den vektoren i $\mathbb{R}^n$ som har et 1-tall på posisjon i, og bare 0-er ellers.

Nå kan vi, ved å se på hver kolonne, skrive om ligningen $AX = I_n$ til disse n ligningene:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_1 &= \mathbf{e}_1 \\ A\mathbf{x}_2 &= \mathbf{e}_2 \\ &\vdots \\ A\mathbf{x}_n &= \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

Dermed kan vi bruke teknikken vi beskrev over for å løse flere ligningssystemer samtidig. Da må vi gausseliminere matrisen

$$\left[\begin{array}{c|cccc} A & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$$

for å løse disse systemene.

La oss ta et eksempel for å se hvordan dette blir i praksis.

Eksempel 4.23. Vi vil forsøke å invertere følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi følger ideene beskrevet over, så vi finner en matrise X slik at $AX = I_3$ ved å løse følgende tre systemer:

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi setter opp den kombinerte totalmatrisen for de tre systemene og gausseliminerer:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{5} & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right] \end{aligned}$$

Vi får altså følgende løsninger:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6/5 \\ -2/5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

Nå finner vi matrisen X ved å bruke $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ og $\mathbf{x}_3$ som kolonner:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6/5 & 1 & -3/5 \\ -2/5 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Vi har funnet X ved å løse ligningen $AX = I_3$.

Hvis du prøver å gange dem sammen motsatt vei, vil du oppdage at vi også har $XA = I_3$. Dette betyr at X er inversen til A, altså at $A^{-1} = X$. △

I eksempelet løste vi ligningen $AX = I_3$, og det viste seg at matrisen X som vi fant også oppfylte likheten $XA = I_3$, slik at vi kunne konkludere med at $A^{-1} = X$.

Dette var ikke en tilfeldighet – det er faktisk alltid nok å løse ligningen $AX = I_n$ for å finne inversen til A. Vi skal bevise dette, men vi tar først et lemma (hjelperesultat) som vi skal bruke i beviset vårt.

Lemma 4.24. *La A og B være $n \times n$-matriser. Dersom*

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} I_n & B \end{array}\right],$$

så er $AB = I_n$.

Bevis. Vi viste over (i diskusjonen før eksempel 4.23) at vi kan løse ligningen $AX = I_n$ ved å gausseliminere matrisen

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right].$$

Nå har vi antatt at

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} I_n & B \end{array}\right],$$

og siden den andre matrisen her er på redusert trappeform, er det den vi ender opp med når vi gausseliminerer. Det vil si at $X = B$ er løsningen av ligningen $AX = I_n$, altså har vi $AB = I_n$. □

Nå er vi klare for å bevise at metoden vår for å finne inverser fungerer.

Teorem 4.25. *La A være en $n \times n$-matrise.*

(a) A er inverterbar hvis og bare hvis $A \sim I_n$.

(b) Hvis A er inverterbar, så kan vi finne inversen ved å gausseliminere matrisen

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$$

til redusert trappeform og lese av høyre halvdel av den resulterende matrisen. Med andre ord: Resultatet av gausseliminasjonen blir følgende matrise:

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right]$$

Bevis. Når vi gausseliminerer matrisen

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$$

til redusert trappeform, må venstre halvdel av den resulterende matrisen enten bli I_n, eller en matrise med minst én nullrad. Men i høyre halvdel kan det ikke bli noen nullrader, for enhver rad vi får etter å ha gjort radoperasjoner på I_n er på formen

$$a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2 + \cdots + a_n\mathbf{r}_n$$

der $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, ..., $\mathbf{r}_n$ er radene i I_n og minst én a_i er ulik 0. Dette betyr at hvis vi får en nullrad i venstre halvdel av trappeformmatrisen, så har ligningen $AX = I_n$ ingen løsning, og dermed er A ikke inverterbar. Dermed har vi vist én halvdel av påstanden i del (a): Hvis A er inverterbar, så må vi ha $A \sim I_n$.

La oss nå anta at $A \sim I_n$. Vi vil vise at da er A inverterbar, og at metoden beskrevet i del (b) gir riktig svar. La B være matrisen vi får som svar ved å bruke denne metoden. Det vil si at følgende matriser er begynnelsen og slutten av gausseliminasjonen vi utfører:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} I_n & B \end{array}\right],$$

Nå sier lemma 4.24 at $AB = I_n$.

La oss stokke litt om på kolonnene i matrisen

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$$

og isteden se på følgende matrise:

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & A \end{array}\right]$$

Hvis vi utfører akkurat de samme radoperasjonene på denne som vi gjorde i gausseliminasjonen av den første matrisen, så får vi akkurat samme resultat, men med tilsvarende omstokking av kolonnene, altså:

$$\left[\begin{array}{c|c} B & I_n \end{array}\right]$$

Dette betyr at disse matrisene er radekvivalente:

$$\left[\begin{array}{c|c} B & I_n \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} I_n & A \end{array}\right]$$

Ved å bruke lemma 4.24 igjen, på denne siste radekvivalensen, får vi at $BA = I_n$.

Vi har altså vist at vi har

$$AB = I_n = BA,$$

som betyr at B er inversen til A. Det vil si at vi har bevist andre halvdel av del (a) (hvis $A \sim I_n$, så er A inverterbar), og vi har bevist at metoden i del (b) gir riktig svar. □

Det alt dette betyr i praksis er at hvis vi har en matrise A som vi har lyst til å invertere, så setter vi opp matrisen

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$$

og gausseliminerer. Da er det to muligheter. Enten får vi en nullrad i venstre halvdel, og da er A ikke inverterbar. Eller så kommer vi frem til redusert trappeform uten noen nullrad i venstre halvdel, og da har vi matrisen

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right]$$

der inversen til A kan leses av i høyre halvdel.

Oppgave

Finn den inverse til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Formel for invertering av 2×2-matrise

Det finnes en formel for den inverse til en 2×2-matrise.

Teorem 4.26. *La*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Da er

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Bevis.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Produktet $A^{-1}A = I_2$ beregnes på samme vis. $\square$

Det finnes tilsvarende formler for $n \times n$-matriser, men det er fryktelig kjedelig. Vi gausseliminerer heller.