NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Matematikk 3

Systemer av diffligninger - Introduksjon

Introduksjon

Vi vil løse differensialligningen

deriverbar funksjon med reelle verdier

$$x'(t) = 3x(t)$$

det vet vi fra Matte 1

$$x(t) = ce^{3t}$$

om vi ikke husker:

$$x'(t) = 3x(t)$$

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int 3 dt$$

$$\log |x(t)| = 3t + C$$

$$\boxed{x(t) = ce^{3t}}$$

gir oss alle løsninger når vi varierer konstanten c

Introduksjon

Vi vil løse de to differensialligningene

deriverbare funksjoner $x(t)$ og $y(t)$ med reelle verdier

$$x'(t) = 3x(t) \longrightarrow x(t) = ce^{3t}$$

$$y'(t) = -y(t) \longrightarrow y(t) = de^{-t}$$

gir oss alle løsninger når vi varierer konstantene c og d

Introduksjon

Vi vil løse de to differensialligningene

deriverbare funksjoner $x(t)$ og $y(t)$ med reelle verdier

$$x'(t) = x(t) + 2y(t)$$

$$y'(t) = 2x(t) + y(t)$$

dette ser ut som matrise gang vektor

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

system av differensialligninger

Men hjelper oss det?

det skal vi studere…

Introduksjon

Vi vil løse de to differensialligningene

deriverbare funksjoner $x(t)$ og $y(t)$ med reelle verdier

i stad så vi på

$$x'(t) = x(t) + 2y(t)$$

$$y'(t) = 2x(t) + y(t)$$

$$x'(t) = 3x(t)$$

$$y'(t) = -y(t)$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

ikke diagonalmatrise

diagonalisering

diagonalmatrise

vanskelig å løse

enkelt å løse

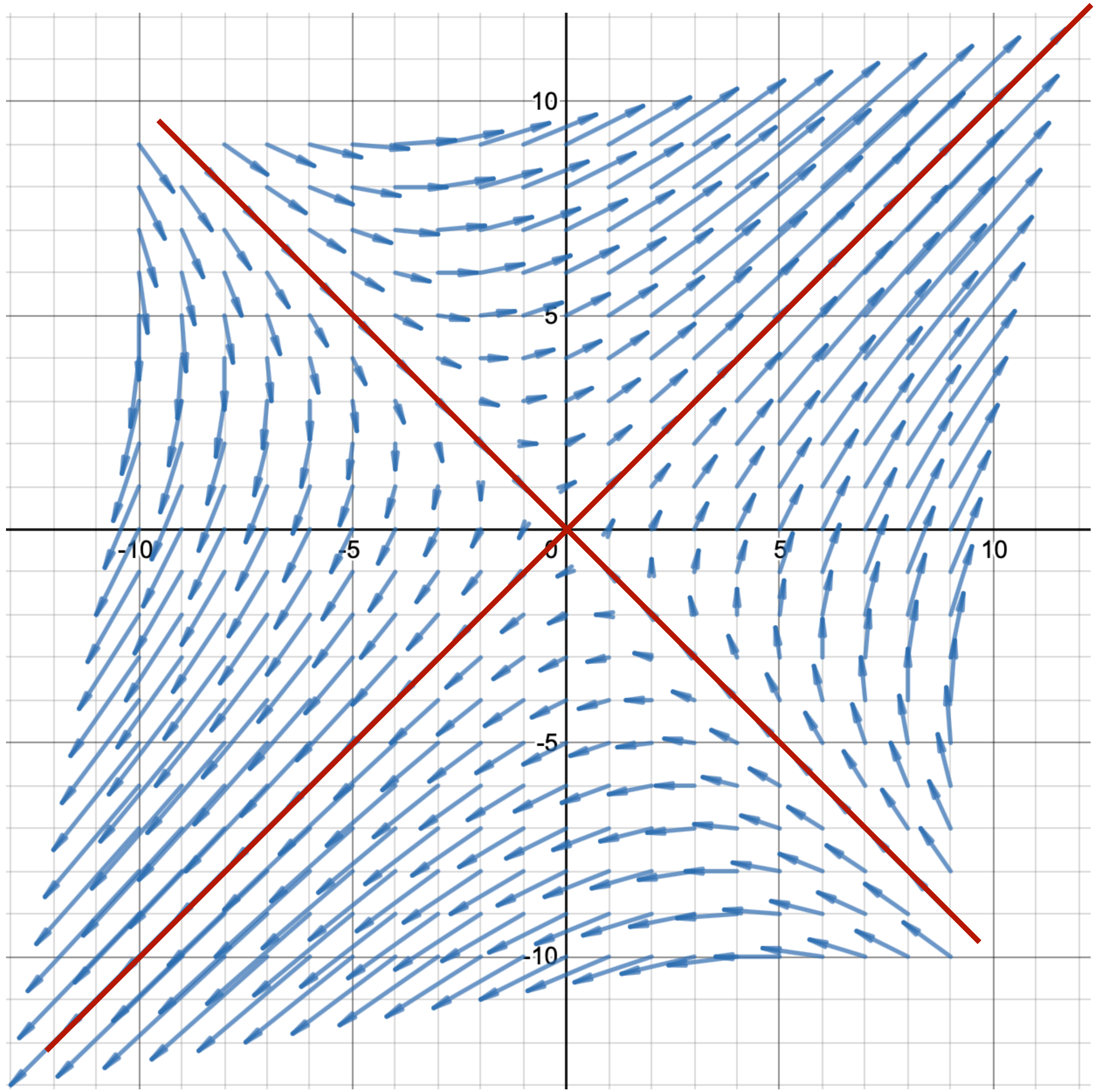
Introduksjon

deriverbare funksjoner
$x(t)$ og $y(t)$ med reelle verdier

system av diffligninger

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

fasediagram



har egenvektorer

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 3 \qquad \lambda = -1$$

Introduksjon

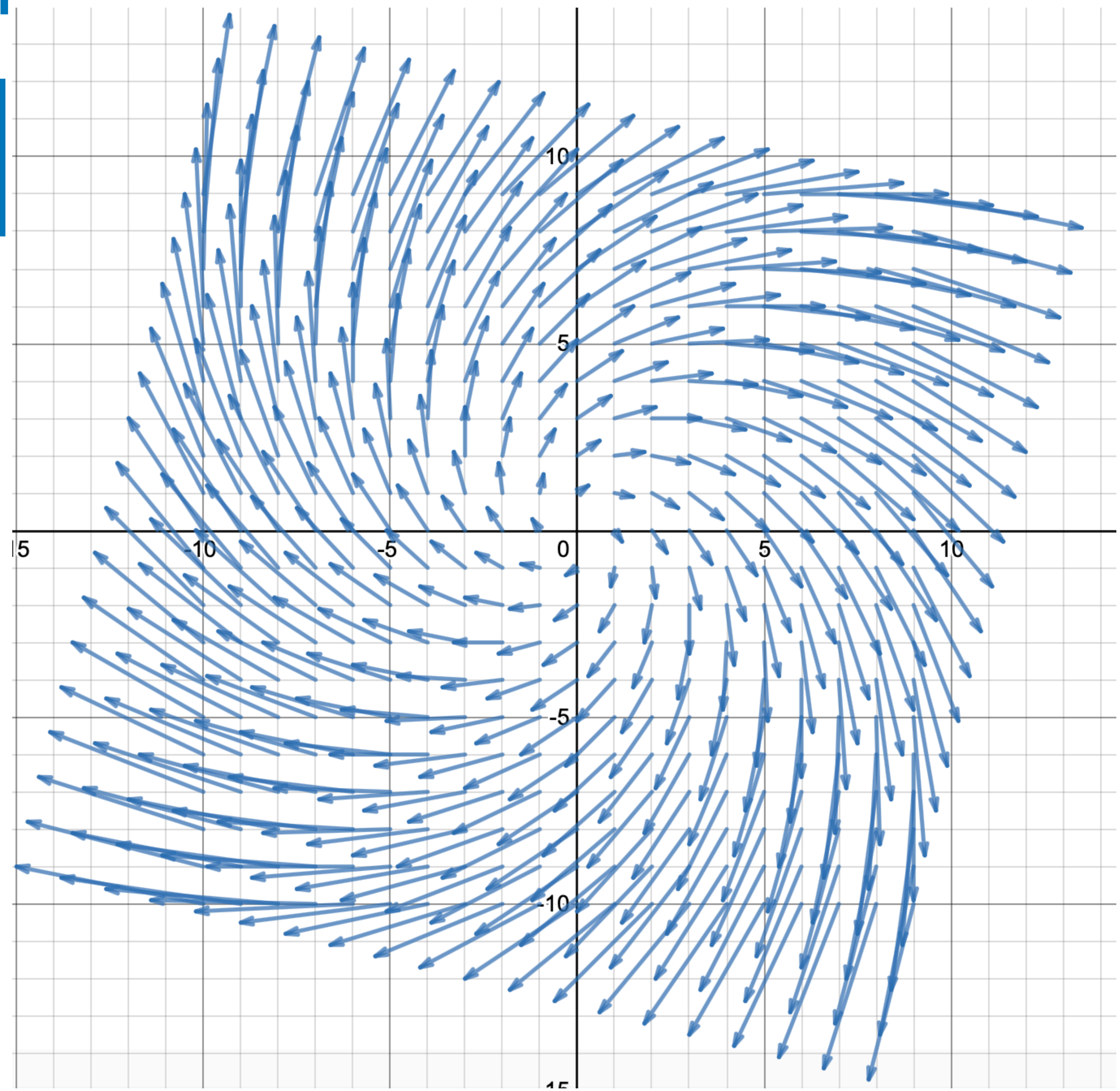
deriverbare funksjoner
$x(t)$ og $y(t)$ med reelle verdier

system av diffligninger

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

to komplekse
egenverdier:
rotasjon

fasediagram



Introduksjon

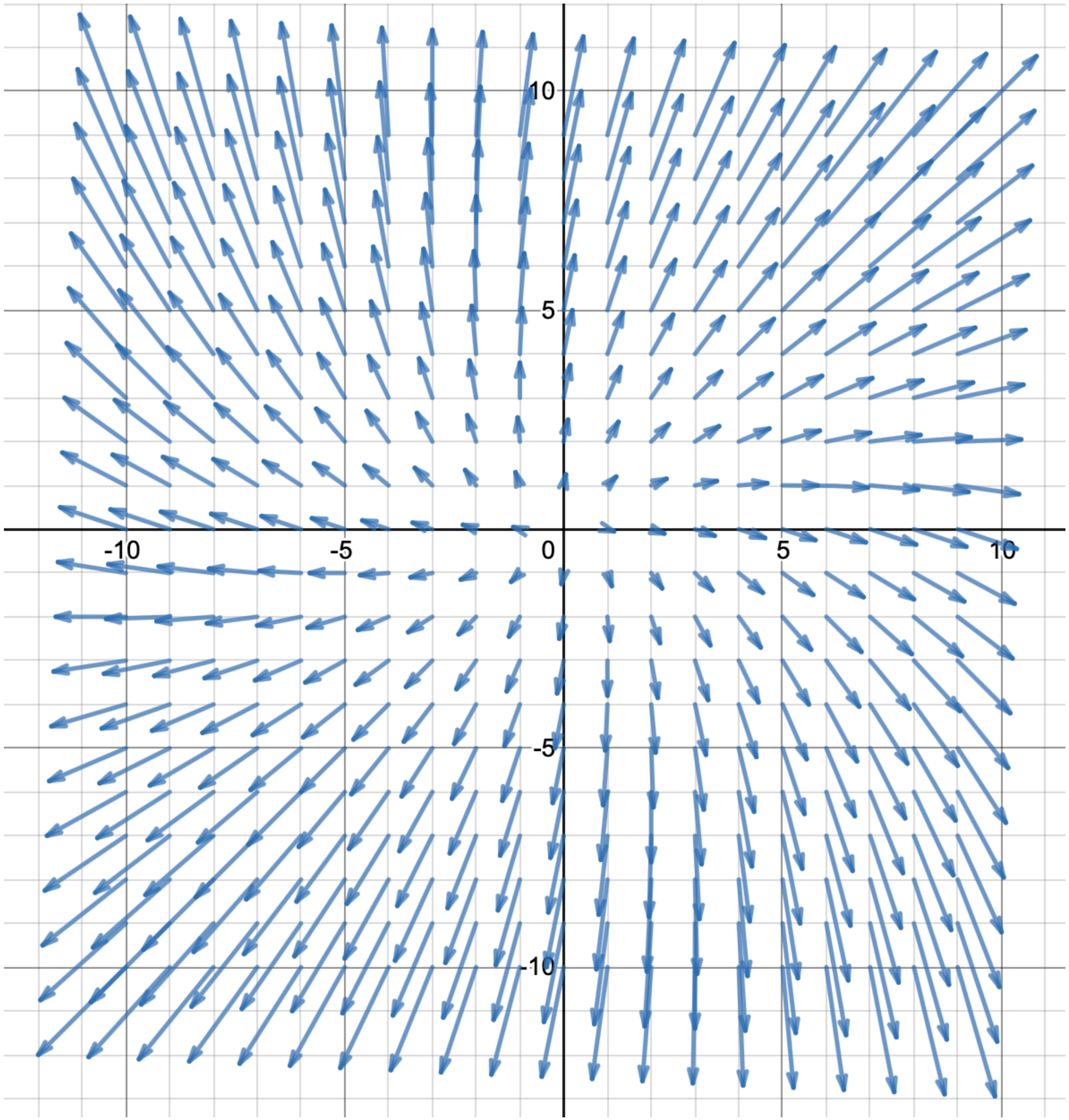
deriverbare funksjoner
$x(t)$ og $y(t)$ med reelle verdier

system av diffligninger

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 5/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

kun én egenverdi

fasediagram



NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Matematikk 3

Systemer av diffligninger - Vektorfunksjoner

Vektorfunksjoner

variablen t tolkes ofte som tid

kan erstattes med for eksempel et åpent intervall

hver $y_i(t)$ er en funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

vi antar at alle funksjoner er kontinuerlig deriverbare

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$ vektor i $\mathbb{R}^n$ for hvert t

Vi ser på $\mathbf{y}(t)$ som en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^n$ og kaller den en vektorfunksjon.

Eksempel:

- $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ e^t \end{bmatrix}$
- $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} t^2 - 1 \\ 5 \end{bmatrix}$
- ...

Vektorfunksjoner

hver $y_i(t)$ er en funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

vektorfunksjon $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$: for hvert t en vektor i $\mathbb{R}^n$

vi skriver
$V = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

Mengden av alle vektorfunksjoner er et reelt vektorrom

nullvektor $\mathbf{0}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

med operasjonene

- $\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) + y_1(t) \\ x_2(t) + y_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) + y_n(t) \end{bmatrix}$
- $a \cdot \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} ay_1(t) \\ ay_2(t) \\ \vdots \\ ay_n(t) \end{bmatrix}$

Vektorfunksjoner

hver $y_i(t)$ er en funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

vektorfunksjon $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$: for hvert t en vektor i $\mathbb{R}^n$

husk: vi antar at
alle komponentene
er kontinuerlig deriverbare

Vi kan derivere vektorfunksjoner:

vi deriverer hver komponente
for seg selv med hensyn til t

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix}$$

Vektorfunksjoner

vektorfunksjon $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$ **: for hvert t en vektor i $\mathbb{R}^n$**

La A være en reell $n \times n$-matrise

System av differensialligninger:

n "lineære" differensialligninger med konstante koeffisienter

et "homogent" system

$$\boxed{\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)}$$

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \ldots + a_{1n}y_n(t) \\ a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + \ldots + a_{2n}y_n(t) \\ \vdots \\ a_{n1}y_1(t) + a_{n2}y_2(t) + \ldots + a_{nn}y_n(t) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$ **er et "inhomogent" system**

Vektorfunksjoner

System av differensialligninger: $\boxed{\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)}$

et underrom i ✓
$V = \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

Mengden av alle løsninger til $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ er et reelt vektorrom.

- **nullvektoren er en løsning:** $\mathbf{0}'(t) = \mathbf{0}(t) = A\mathbf{0}(t)$ ✓
- **for to løsninger $\mathbf{y}_1(t)$ og $\mathbf{y}_2(t)$ og to reelle tall c_1 og c_2 har vi:**

$$(c_1 \cdot \mathbf{y}_1(t) + c_2 \cdot \mathbf{y}(t)_2)'(t) = c_1 \cdot \mathbf{y}_1'(t) + c_2 \cdot \mathbf{y}_2'(t)$$

$$= c_1 \cdot A\mathbf{y}_1(t) + c_2 \cdot A\mathbf{y}_2(t)$$

$$= A(c_1 \cdot \mathbf{y}_1(t) + c_2 \cdot \mathbf{y}_2(t))$$ ✓

$c_1 \cdot \mathbf{y}_1(t) + c_2 \cdot \mathbf{y}_2(t)$
er også en løsning

Vektorfunksjoner

System av differensialligninger: $\boxed{\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)}$

et underrom i ✓
$V = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

Mengden av alle løsninger til $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ er et reelt vektorrom.

- **Hvordan finner vi alle løsninger?**

hva er dimensjonen av
løsningsrommet?

NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Matematikk 3

Systemer av diffligninger - Generelle løsninger 1

Generelle løsninger

La A være en reell $n \times n$-matrise og $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$ være en vektorfunksjon.

System av differensialligninger:

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$$

som en reell matrise

Vi skal nå anta at A er diagonaliserbar.

vi ser på andre situasjoner

Generelle løsninger

A er en reell $n \times n$-matrise

som en reell matrise

System av differensialligninger: $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

$\boxed{\text{Vi antar at } A \text{ er diagonaliserbar.}}$

- Da finnes det en basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer for A

anta $\mathbf{v}$ er egenvektor i $\mathbb{R}^n$ til A med egenverdi λ og sett $\underline{\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}}$

$$\mathbf{y}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} = e^{\lambda t}\underline{\lambda \mathbf{v}} = e^{\lambda t}\underline{A\mathbf{v}} = A(e^{\lambda t}\mathbf{v}) = A\mathbf{y}(t)$$

$\boxed{\text{dvs } \mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} \text{ er en løsning!}}$

Generelle løsninger

A er en reell $n \times n$-matrise

som en reell matrise

System av differensialligninger: $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

Vi antar at A er diagonaliserbar.

- Da finnes det en basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer for A

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ med egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

Teorem: Da danner vektorfunksjonene $e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2, \ldots, e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$ en basis for løsningsrommet til $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$.

Generelle løsninger

A er en reell diagonaliserbar $n \times n$-matrise $\qquad \mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

- Vi finner en basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer for A

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ med egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

Teorem: Alle løsningene til $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ kan skrives som

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$$ med konstanter $c_1, \ldots, c_n$.

- **Fordi (1):** for hver t finnes det tall $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ slik at

$$\mathbf{y}(t) = x_1(t)\mathbf{v}_1 + x_2(t)\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n(t)\mathbf{v}_n$$

vi deriverer

$$\mathbf{y}'(t) = x_1'(t)\mathbf{v}_1 + x_2'(t)\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n'(t)\mathbf{v}_n$$

fordi $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ er kontinuerlig deriverbare, er $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ det også

Generelle løsninger

A er en reell diagonaliserbar $n \times n$-matrise $\qquad \mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

- Vi finner en basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer for A

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ med egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

Teorem: Alle løsningene til $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ kan skrives som

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$$ med konstanter $c_1, \ldots, c_n$.

- **Fordi (1):** for hver t finnes det tall $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ slik at

$$\mathbf{y}(t) = x_1(t)\mathbf{v}_1 + x_2(t)\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n(t)\mathbf{v}_n \qquad \mathbf{y}'(t) = x_1'(t)\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n'(t)\mathbf{v}_n$$

$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$

$$A\mathbf{y}(t) = \lambda_1 x_1(t)\mathbf{v}_1 + \lambda_2 x_2(t)\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n x_n(t)\mathbf{v}_n$$

Generelle løsninger

A er en reell diagonaliserbar $n \times n$-matrise $\quad \mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

- Vi finner en basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer for A

  $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ med egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

Teorem: Alle løsningene til $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ kan skrives som

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$$ med konstanter $c_1, \ldots, c_n$.

- **Fordi (1):** for hver t finnes det tall $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ slik at

$$x_1'(t)\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n'(t)\mathbf{v}_n = \mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) = \lambda_1 x_1(t)\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n x_n(t)\mathbf{v}_n$$

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ er en basis

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1(t) \\ \lambda_2 x_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_n x_n(t) \end{bmatrix}$$

derfor er koeffisientene entydige!

Generelle løsninger

A er en reell diagonaliserbar $n \times n$-matrise $\qquad \mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

- Vi finner en basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer for A

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ med egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

Teorem: Alle løsningene til $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ kan skrives som

$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$ med konstanter $c_1, \ldots, c_n$.

- Fordi (1):

dette vet vi fra Matte 1

$$x_1'(t) = \lambda_1 x_1(t) \longrightarrow x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$x_2'(t) = \lambda_2 x_2(t) \longrightarrow x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = \lambda_n x_n(t) \longrightarrow x_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}$$

Generelle løsninger

A er en reell diagonaliserbar $n \times n$-matrise $\qquad \mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

- Vi finner en basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer for A

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ med egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

Teorem: Alle løsningene til $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ kan skrives som

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$$ med konstanter $c_1, \ldots, c_n$.

- Fordi (1):

$$\mathbf{y}(t) = x_1(t)\mathbf{v}_1 + x_2(t)\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n(t)\mathbf{v}_n$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) &= c_2 e^{\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ x_n(t) &= c_n e^{\lambda_n t} \end{aligned}}$$

NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Matematikk 3

Systemer av diffligninger - Generelle løsninger 2

Generelle løsninger

A er en reell diagonaliserbar $n \times n$-matrise $\qquad \mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

- Vi finner en basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer for A

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ med egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

Teorem: Alle løsningene til $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ kan skrives som

$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$ med konstanter $c_1, \ldots, c_n$.

- **Fordi (2):** Vi kan skrive A som $\qquad A = PDP^{-1}$

P er den inverterbare matrisen

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]$$

første kolonne

andre kolonne

nte kolonne

D er diagonalmatrisen

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Generelle løsninger

A er en reell diagonaliserbar $n \times n$-matrise

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$$

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ med egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

- **Fordi (2):** Vi kan skrive A som $A = PDP^{-1}$

P er den inverterbare matrisen

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]$$

D er diagonalmatrisen

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

vi ganger med P^{-1} på begge sidene

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) = PDP^{-1}\mathbf{y}(t)$$

P^{-1} har konstante elementer

$$P^{-1}\mathbf{y}'(t) = DP^{-1}\mathbf{y}(t)$$

vi skriver $\mathbf{x}(t) = P^{-1}\mathbf{y}(t)$

og får $\mathbf{x}'(t) = P^{-1}\mathbf{y}'(t)$

$$\boxed{\mathbf{x}'(t) = D\mathbf{x}(t)}$$

Generelle løsninger

A er en reell diagonaliserbar $n \times n$-matrise $\qquad \mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ med egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

- **Fordi (2):** Vi kan skrive A som $\quad A = PDP^{-1}$

$$\mathbf{x}(t) = P^{-1}\mathbf{y}(t)$$

$$\mathbf{x}'(t) = P^{-1}\mathbf{y}'(t)$$

$$\boxed{\mathbf{x}'(t) = D\mathbf{x}(t)}$$

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1(t) \\ \lambda_2 x_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_n x_n(t) \end{bmatrix}$$

dette vet vi fra Matte 1

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \lambda_1 x_1(t) & \longrightarrow \quad x_1(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2'(t) &= \lambda_2 x_2(t) & \longrightarrow \quad x_2(t) &= c_2 e^{\lambda_2 t} \\ &\vdots & &\vdots \\ x_n'(t) &= \lambda_n x_n(t) & \longrightarrow \quad x_n(t) &= c_n e^{\lambda_n t} \end{aligned}$$

Generelle løsninger

A er en reell diagonaliserbar $n \times n$-matrise $\quad \mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ med egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

- **Fordi (2):** Vi kan skrive A som $\quad A = PDP^{-1}$

$$\mathbf{x}(t) = P^{-1}\mathbf{y}(t)$$

$$\mathbf{x}'(t) = P^{-1}\mathbf{y}'(t)$$

$$\boxed{\mathbf{x}'(t) = D\mathbf{x}(t)}$$

Men hva er $\mathbf{y}(t)$?

$$\mathbf{x}(t) = P^{-1}\mathbf{y}(t)$$

$$P\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$$

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]$$

$$P\mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{v}_1 + x_2(t)\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n(t)\mathbf{v}_n$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= c_1e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) &= c_2e^{\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ x_n(t) &= c_ne^{\lambda_n t} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \ldots + c_ne^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n}$$

Generelle løsninger

A er en reell diagonaliserbar $n \times n$-matrise $\qquad A = PDP^{-1}$

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ med egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

- **Fordi (2):** **En liten oppsummering:**

> **Diagonaliseringen separer variablene og gjør det mulig å se på én retning om gangen.**

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) \qquad \mathbf{x}'(t) = D\mathbf{x}(t)$$

alle $y_1(t), \ldots, y_n(t)$
påvirker $y_i'(t)$

$$\vdots$$
$$y_i'(t) = a_{i1}y_1(t) + \ldots + a_{in}y_n(t)$$
$$\vdots$$

vanskelig å løse

kun $x_i(t)$
påvirker $x_i'(t)$

$$\vdots$$
$$x_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$$
$$\vdots$$

enkelt å løse

Generelle løsninger

A er en reell diagonaliserbar $n \times n$-matrise $\qquad A = PDP^{-1}$

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ med egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

Hva er nå dimensjonen av løsningsrommet?

- **Alle løsningene til $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ kan skrives som**

$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$ **med konstanter $c_1, \ldots, c_n$.**

n **basisvektorer og dermed er dimensjonen lik n**

- $c_1, \ldots, c_n$ **kan tolkes som koordinatene av løsningen $\mathbf{y}(t)$ i rommet av alle løsninger.**

Generelle løsninger

A er en reell diagonaliserbar $n \times n$-matrise $\qquad A = PDP^{-1}$

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ med egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$ med konstanter $c_1, \ldots, c_n$.

- Vi kan bestemme $c_1, \ldots, c_n$ når vi har en initialverdi:

sammen med

vi vil at løsningen $\mathbf{y}(t)$ har denne verdien for $t = t_0$

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{w}$$

initialverdiproblem

Teorem: Hvert initialverdiproblem har en unik løsning.

Kunnskap for en bedre verden

Matematikk 3

Systemer av diffligninger - Første eksempler

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ **med** $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\boxed{\lambda_1 = -1 \text{ og } \lambda_2 = -2}$

$$0 = \det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-\lambda)(-3-\lambda) - (-2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$ **dvs** $\lambda + 1 = 0$ **eller** $\lambda + 2 = 0$

$\lambda = -1$ **eller** $\lambda = -2$

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ **med** $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\lambda_1 = -1$ **og** $\lambda_2 = -2$
- **Skritt 2: Finn egenvektorer**
- $\lambda_1 = -1$ $\quad A - (-1)I_2 = \begin{bmatrix} -(-1) & 1 \\ -2 & -3-(-1) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

egenvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $\lambda_2 = -2$ $\quad A - (-2)I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

egenvektor $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ **med** $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\lambda_1 = -1$ **og** $\lambda_2 = -2$
- **Skritt 2: Finn egenvektorer** $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
- **Skritt 3: Skriv ned den generelle løsningen**

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 = \boxed{c_1 e^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ **med** $\boxed{\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}}$

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\lambda_1 = -1$ **og** $\lambda_2 = -2$
- **Skritt 2: Finn egenvektorer** $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
- **Skritt 3: Skriv ned den generelle løsningen**

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- **Skritt 4: Bestem koeffisientene**

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \mathbf{y}(0) = c_1 e^0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^0 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$c_1 = -17$ **og** $c_2 = -12$

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = (-17)e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 12e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -12 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 7 & 12 & 5 \end{bmatrix}$$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ **med** $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -10 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\boxed{\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1}$

$$0 = \det(A - \lambda I_3) = \det\left(\begin{bmatrix} -8-\lambda & -12 & -6 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 7 & 12 & 5-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$\ldots = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2 = -\underline{(\lambda+1)}\underline{(\lambda+2)}\underline{(\lambda-1)}$$

dvs $\lambda + 1 = 0$ **eller** $\lambda + 2 = 0$ **eller** $\lambda - 1 = 0$

$\lambda = -1$ **eller** $\lambda = -2$ **eller** $\lambda = 1$

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -12 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 7 & 12 & 5 \end{bmatrix}$$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ **med** $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -10 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$
- **Skritt 2: Finn egenvektorer**

- $\lambda_1 = -2$ $$\begin{bmatrix} -8-(-2) & -12 & -6 \\ 2 & 1-(-2) & 2 \\ 7 & 12 & 5-(-2) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -6 & -12 & -6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 7 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 7 & 12 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ **egenvektor** $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $\lambda_2 = -1$

  egenvektor $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

- $\lambda_3 = 1$

  egenvektor $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -12 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 7 & 12 & 5 \end{bmatrix}$$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ **med** $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -10 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$
- **Skritt 2: Finn egenvektorer** $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$
- **Skritt 3: Skriv ned den generelle løsningen**

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + c_3 e^{t} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -12 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 7 & 12 & 5 \end{bmatrix}$$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ **med** $\boxed{\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -10 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}}$

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$
- **Skritt 2: Finn egenvektorer** $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$
- **Skritt 3: Skriv ned den generelle løsningen**

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + c_3 e^{t} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- **Skritt 4: Bestem koeffisientene**

$$\begin{bmatrix} -10 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = c_1 e^0 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^0 \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + c_3 e^0 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$c_1 = 4$, $c_2 = 5$ **og** $c_3 = -6$

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = 4e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 5e^{-t} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - 6e^{t} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}$$

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

- **Skritt 1: Finn egenverdiene**

$$0 = \det(A - \lambda I_3) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & -3 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= \underline{(1-\lambda)}(\underbrace{(2-\lambda)^2}_{\geq 0} + 9)$$

har ingen reelle løsninger

$\boxed{\textbf{vi må jobbe litt mer...}}$

NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Matematikk 3

Systemer av diffligninger - Komplekse egenverdier

Eksempler

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\boxed{\lambda_1 = 2 + 3i \text{ og } \lambda_2 = 2 - 3i}$

$$0 = \det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -3 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= \underbrace{(2-\lambda)^2}_{\geq 0} + 9 \iff -9 = (2-\lambda)^2$$

har ingen reelle løsninger

$$\iff \lambda = 2 + 3i \text{ eller } \lambda = 2 - 3i$$

Vi kjører på med oppskriften…

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\lambda_1 = 2 + 3i$ **og** $\lambda_2 = 2 - 3i$
- **Skritt 2: Finn egenvektorer**
- $\lambda_1 = 2 + 3i$ $A - (2+3i)I_2 = \begin{bmatrix} -3i & 3 \\ -3 & -3i \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\textbf{egenvektor } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}}$$

- $\lambda_2 = 2 - 3i$ $A - (2-3i)I_2 = \begin{bmatrix} 3i & 3 \\ -3 & 3i \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\textbf{egenvektor } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}}$$

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\lambda_1 = 2 + 3i$ **og** $\lambda_2 = 2 - 3i$
- **Skritt 2: Finn egenvektorer** $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$
- **Skritt 3: Skriv ned den generelle løsningen…**

$$e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 = e^{(2+3i)t}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \qquad e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 = e^{(2-3i)t}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

hva gjør vi med de komplekse elementene…?

Vi observerer:

- **Real- og imaginærdelen av** $e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1$ **gir oss reelle løsninger**

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

- **Skritt 3: Skriv ned den generelle løsningen…**

$$e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 = e^{(2+3i)t}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

- **Real- og imaginærdelen av $e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1$ gir oss reelle løsninger**

$$e^{(2+3i)t}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = e^{2t}e^{i3t}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Eulers formel:
$e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta$

realdel
$\mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1)$

$$= e^{2t}\left(\cos(3t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin(3t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) +$$

imaginærdel
$\mathrm{Im}(e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1)$

$$i \cdot e^{2t}\left(\cos(3t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin(3t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

Eksempler

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

- **Skritt 3: Skriv ned den generelle løsningen:**

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{2t}\left(\cos(3t)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} - \sin(3t)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

danner en basis for løsningsrommet

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{2t}\left(\cos(3t)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \sin(3t)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$$

- **Den generelle løsningen:**

$\boxed{\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{y}_1(t) + c_2\mathbf{y}_2(t) \text{ **med reelle tall** } c_1, c_2}$

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ $\boxed{\textbf{med } \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}}$

- **Skritt 3: Skriv ned den generelle løsningen:**

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{2t}\left(\cos(3t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin(3t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \quad \mathbf{y}_2(t) = e^{2t}\left(\cos(3t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin(3t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

- **Skritt 4: Bestem koeffisientene**

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \mathbf{y}(0) = c_1 e^0\left(\cos 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + c_2 e^0\left(\cos 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ $\boxed{c_1 = 5 \textbf{ og } c_2 = 7}$

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi prøver en gang til å løse $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\boxed{\lambda_1 = 2 + 3i, \lambda_2 = 2 - 3i, \lambda_3 = 1}$

$$0 = \det(A - \lambda I_3) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & -3 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= \underline{(1-\lambda)}(\underline{(2-\lambda)^2 + 9})$$

det har vi nettopp sett

$$\iff \lambda = 2 + 3i \text{ **eller** } \lambda = 2 - 3i \text{ **eller** } \lambda = 1$$

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi prøver en gang til å løse $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\lambda_1 = 2 + 3i, \lambda_2 = 2 - 3i, \lambda_3 = 1$

- **vi kjører resten av oppskriften…**

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{2t}\left(\cos(3t)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \sin(3t)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

$$+c_2 e^{2t}\left(\cos(3t)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \sin(3t)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$$

$$+c_3 e^{t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Matematikk 3

Systemer av diffligninger - Én reell egenverdi

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi vil løse $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\boxed{\lambda = 2}$

$$0 = \det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (2-\lambda)^2$$

dvs $\lambda = 2$

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\lambda = 2$
- **Skritt 2: Finn egenvektorer**
- $\lambda = 2$ $$A - 2I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ $$\boxed{\text{egenvektor } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$
- **Vi kan ikke finne en basis som består av egenvektorer.**
- **Skritt 3: Skriv ned en generell løsning**

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ **men det er mer…**

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ $$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

er én basisvektor for løsningsrommet

- **Vi ser en gang til på ligningen:**

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) \qquad \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1(t) + y_2(t) \\ 2y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y_2'(t) = 2y_2(t)$$ **dvs** $y_2(t) = ce^{2t}$

vi setter inn for $y_2(t)$

$$y_1'(t) = 2y_1(t) + y_2(t)$$

$$y_1'(t) = 2y_1(t) + ce^{2t}$$

produktregel for derivasjon

$$\boxed{y_1(t) = cte^{2t}}$$

legg merke til en ekstra t

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ $\qquad \mathbf{y}(t) = e^{2t}\mathbf{v} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

er én basisvektor
for løsningsrommet

- **Nå har vi to lineært uavhengige løsninger:**

$$\mathbf{y}(t) = e^{2t}\mathbf{v} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{og } \mathbf{y}(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Skriv ned den generelle løsningen:**

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = c_1 e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}}$$

her har vi
en ekstra t

Eksempler

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ **Vi vil løse** $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$

$$\mathbf{y}(t) = e^{2t}\mathbf{v} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og $\mathbf{y}(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$

er to basisvektorer for løsningsrommet

- **Vi ser på løsningen en siste gang:**

$$= e^{2t}\left(t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

egenvektor v

generalisert egenvektor w

en løsning til

$$(A - \lambda I_2) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}$$

her: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **altså** $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Eksempler

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Vi vil løse $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$:

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\boxed{\lambda = 2}$

$$0 = \det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 3/2 - \lambda & 1/2 \\ -1/2 & 5/2 - \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (3/2 - \lambda)(5/2 - \lambda) + 1/4$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

$$= (\lambda - 2)^2$$

dvs $\lambda = 2$

Eksempler

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Vi vil løse $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$:

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\lambda = 2$
- **Skritt 2: Finn egenvektorer**
- $\lambda = 2$

$$A - 2I_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\textbf{egenvektor } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Eksempler

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Vi vil løse $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$:

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\lambda = 2$
- **Skritt 2: Finn en egenvektorer** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- **Skritt 3: Finn en generalisert egenvektor**

en løsning til

$$\boxed{(A - \lambda I_2) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}}$$

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dvs $w_1 = -1,\ w_2 = 1$

$$\boxed{\textbf{generalisert egenvektor } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Eksempler

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Vi vil løse $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$:

- **Skritt 1: Finn egenverdiene** $\lambda = 2$
- **Skritt 2: Finn en egenvektorer** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- **Skritt 3: Finn en generalisert egenvektor** $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- **Skritt 4: Skriv ned den generelle løsningen**

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda t}\mathbf{v} + c_2 e^{\lambda t}(t\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$= c_1 e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t}\left(t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Eksempler

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

- **En siste observasjon**

Vi kan skrive A som

$$A = PJP^{-1}$$

P^{-1} er den inverterbare matrisen

$$P^{-1} = [\mathbf{w} \quad \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

J er den triangulære matrisen

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jordanform

Dette generaliserer diagonalisering…